PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. 1. Juli 1919. Redaktionsschluß für No. 15 am 10. Juli 1919. 20. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

P. S. Epstein, Bemerkungen zur Frage der Quantelung des Kreisels. S. 289.

H. Lorenz, Kurze Ableitung der Bewegungsgleichungen des Kreisels. S. 294.

F. Reiche, Bemerkungen zur Leuchtdauer der Serienlinien. S. 296.

W. Gerlach, Notiz zur Frage nach der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes. S. 298.

K. Przibram, Über die elektrischen Figuren. S. 299.

Zusammenfassende Bearbeitungen:

R. Fürth, Schwankungserscheinungen in der Physik. S. 303.

Besprechungen:

O. Lummer, Grundlagen, Ziele und Grenzen der Leuchttechnik. S. 310.

M. v. Rohr, Das Auge und die Brille. S. 311.

E. Schwarz, Feuerfeste und hochfeuerfeste Stoffe. S. 311.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. S. 311.

F. Auerbach, Das Wesen der Materie. S. 312.

R. Vater, Die neueren Wärmekraftmaschinen. S. 312.

A. Lampa, Ernst Mach. S. 312.

Angebote. S. 312.

Gesuche. S. 312.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Bemerkungen zur Frage der Quantelung des Kreisels.

Von Paul S. Epstein.

§ 1. Bis vor kurzem schien es drei verschiedene Arten der Quantelung des asymmetrischen Kreisels zu geben. Bereits in seiner grundlegenden Abhandlung von 1916 hatte Planck[1]) dieses spezielle Beispiel einer ausführlichen Diskussion unterzogen. Etwas später behandelte ich diese Frage[2]) auf eine Weise, welche mir meinen Regeln für die Quantelung separierbarer Systeme am besten zu entsprechen schien. Dabei hielt ich das Problem für nicht separierbar und befand mich mit dieser Annahme im Irrtum: zwei Jahre später hat Reiche[3]) mit Hilfe einer von Kolossoff angegebenen Punkttransformation, welche die Separation ermöglicht, die Quantelung nach den von Schwarzschild und mir aufgestellten Regeln durchgeführt. Er gelangt dabei zu einem sowohl von dem Planckschen als scheinbar auch von dem meinigen verschiedenen Ausdruck für die Energie als Funktion der Quantenzahlen.

Neuerdings hat nun Planck[4]) gezeigt, daß eine Abänderung seiner Behandlungsweise genau auf die Reicheschen Resultate führt. Und zwar ist die neue Art der Behandlung der ursprünglichen vorzuziehen, weil sie im Gegensatz zu jener dem Kriterium der adiabatischen Invarianz standhält. Damit war die einzige wesentliche Diskrepanz, welche zwischen den Ergebnissen der Planckschen Methode der Einschränkung der Bewegungsfreiheit und der Methode der Separation bestand, beseitigt und die praktische Übereinstimmung der beiden Auffassungen[1]) an einem weiteren Beispiel erwiesen. Die Zahl der verschiedenen Lösungen des Kreiselproblems schien demnach auf zwei, die Reiche-Planckschе und die meinige reduziert.

Eine solche Vielfältigkeit der Lösungen wäre an sich durchaus nicht überraschend, da der asymmetrische Kreisel zu den sogenannten entarteten Systemen oder Systemen mit kohärenten Freiheitsgraden gehört, worauf bereits Planck hingewiesen hatte. Darunter werden diejenigen Systeme verstanden[2]), welche nicht von allen ihnen zustehenden Freiheitsgraden Gebrauch machen: Die Lage des Kreisels wird durch drei Koordinaten festgelegt, in der integrierten Bewegungsgleichung treten indessen nicht drei Konstanten, sondern nur zwei auf, und dieser Umstand stempelt das Problem zu einem entarteten. Dasjenige Kennzeichen solcher Systeme, auf welches es in der Quantentheorie vor allem ankommt, besteht darin, daß die Separationsvariablen bei ihnen nicht eindeutig festgelegt sind. Nachdem es also durch Reiche erwiesen war, daß Separation möglich ist, durfte man erwarten, auch mit Hilfe anderer Koordinaten als der Kolossoffschen dasselbe Ziel zu erreichen. In der Tat zeigte es sich, daß man die von mir gefundenen Formeln unter Benutzung einer von Bruns[3]) angegebenen Transformation auch auf dem Wege der Separation erhalten kann, was ich im folgenden näher ausführen möchte.

Es ist ferner eine Eigenschaft der entarteten Systeme, daß die Quantelung in zwei verschiedenen Separationssystemen in der Regel zu demselben Ausdruck der Energie durch die Quanten-

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 50, 385, 1916.
2) P. S. Epstein, Verh. d. D. phys. Ges. 18, 398, 1916.
3) F. Reiche, diese Zeitschr. 19, 394, 1918.
4) M. Planck, Berliner Ber. 1918, S. 1166.

1) P. S. Epstein, Berliner Ber. 1918, S. 435.
2) P. S. Epstein, Ann. d. Phys. 51, 168, 1916.
3) H. Bruns, Leipziger Ber. 1885, S. 55. Für den Hinweis auf diese Abhandlung bin ich Professor E. Hilb zu Dank verpflichtet.

zahlen führt, obwohl den letzteren in den beiden Fällen ein ganz verschiedener geometrischer Sinn zukommt. Diese Regel bestätigt sich auch im Spezialfall des Kreisels: Wir werden sehen, daß die Reiche-Plancksche Endformel mit der 1916 von mir gegebenen identisch ist.

Zugleich ergreife ich die Gelegenheit, um in den §§ 3 und 4 einige ergänzende Bemerkungen zu meinen früheren Ausführungen über die spezifische Wärme des Wasserstoffs zu machen.

§ 2. Es sei die Lage eines starren Körpers mit den Hauptträgheitsmomenten $I < K < L$ durch die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ bestimmt, wobei ψ und ϑ Azimut und Polarwinkel einer der Trägheitsachsen (etwa derjenigen mit dem Trägheitsmoment L) in bezug auf eine geeignet gewählte Polarachse bedeuten. In der erwähnten Untersuchung ließ ich diese Polarachse mit der Richtung des Hauptdrehmomentes zusammenfallen und erhielt für die Impulse die folgenden Werte

$$p_\vartheta = 0, \quad p_\psi = \frac{\sqrt{2T}}{f}, \quad p_\varphi = \frac{\sqrt{2T}}{f}\cos\vartheta, \quad (1)$$

während φ und ϑ durch die Beziehung

$$\left(\frac{\sin^2\varphi}{I} + \frac{\cos^2\varphi}{K}\right)\sin^2\vartheta + \frac{1}{L}\cos^2\vartheta = f^2 \quad (2)$$

verknüpft waren. Dabei sind T und f zwei Konstanten, von denen die erstere die lebendige Kraft bedeutet. Aus den drei letzten dieser Gleichungen können wir f und $\cos\vartheta$ eliminieren und die resultierende Beziehung nach T auflösen:

$$2T = \frac{p^2_\varphi}{L} + \left(p^2_\psi - p^2_\varphi\right)\left(\frac{\sin^2\varphi}{I} + \frac{\cos^2\varphi}{K}\right). \quad (3)$$

Mit Hilfe der anderen l. c. abgeleiteten Beziehungen zwischen Impulsen und Winkeln kann man sich überzeugen, daß der gewonnene Ausdruck für T die Hamiltonsche Funktion des Problems darstellt, wenn man die Größen φ, ψ, p_φ, p_ψ als kanonische Variable benutzt. Ein drittes Koordinatenpaar kommt hier nicht vor, d. h. das Problem ist, entsprechend dem in § 1 über entartete Systeme Gesagten, auf nur zwei Dimensionen zurückgeführt. Der Vorzug der Form (3) der Hamiltonschen Funktion besteht darin, daß das Problem sich sofort durch Separation lösen läßt; denn da sie von ψ unabhängig ist, muß man $p_\psi = \text{const}$ setzen, und damit ist die Trennung der Variablen vollzogen. Man erhält genau die Gleichungen (24) meiner erwähnten Note, während diese erst gerechtfertigt werden.

Man kann also nicht mehr daran zweifeln, daß auch die von mir benutzte Art der Quantelung die für separierbare Systeme vorgeschriebene ist. Indessen sind wir zum Ausdruck (3) der Hamiltonschen Funktion auf dem Umweg über eine teilweise Lösung des Problems gelangt, und es erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, dasselbe Resultat mittels einer einfachen Koordinatentransformation aus der ursprünglichen Form der Energiegleichung zu erreichen. Wie bereits erwähnt, wurde eine geeignete Transformation in einer älteren Abhandlung von Bruns angegeben: Man wähle als Polarachse unseres Systems der Eulerschen Winkel ϑ, φ, ψ eine willkürliche Richtung, was auf den folgenden Ausdruck für die Hamiltonsche Funktion führt[1])

$$2T = \frac{1}{I}\left(p_\vartheta\cos\varphi + \frac{p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\sin\varphi\right)^2 + \frac{1}{K}\left(p_\vartheta\sin\varphi - \frac{p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\cos\varphi\right)^2 + \frac{p^2_\varphi}{L}. \quad (4)$$

Um diesen Ausdruck umzuformen benutzt Bruns den bekannten von Jacobi stammenden Satz: Es seien p_i, q_i $(i = 1, 2, \ldots f)$ die kanonisch konjugierten Koordinaten eines Systems. Führt man neue Variable durch die Beziehungen ein

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad q_i' = \frac{\partial W}{\partial p_i'},$$

wo W irgendeine Funktion der Argumente q_i und p_i' bedeutet, so sind diese neuen Variablen gleichfalls kanonisch. Eine solche Umformung bezeichnet man als Berührungsformation.

In unserem Falle wollen wir die neuen Koordinaten und Impulse mit q_1, q_2, q_3 bzw. p_1, p_2, p_3 bezeichnen, so daß man die Beziehungen erhält

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad p_\psi = \frac{\partial W}{\partial \psi}, \quad p_\vartheta = \frac{\partial W}{\partial \vartheta}, \\ q_1 &= \frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial W}{\partial p_2}, \quad q_3 = \frac{\partial W}{\partial p_3}. \end{aligned} \quad (5)$$

Um die Funktion W zu definieren, fassen wir mit Bruns ein sphärisches Dreieck mit den Winkeln Θ, Λ, Z und den gegenüberliegenden Seiten ϑ, 2δ, 2ζ ins Auge. Die zunächst unbestimmten Seiten 2δ, 2ζ legen wir durch die Beziehungen

$$p_1 = p_3\cos 2\delta, \qquad p_2 = p_3\cos 2\zeta \quad (6)$$

fest, wodurch auch die Winkel definiert sind. Die Funktion W habe die Form

$$W = p_3\Theta + p_2(\psi + \Lambda) + p_1(\varphi + Z), \quad (7)$$

1) F. Reiche, l. c. S. 395.

wobei man sich Θ, Δ, Z durch ϑ und die Impulse p_1, p_2, p_3 ausgedrückt denken muß. Mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie findet man

$$\frac{\partial Z}{\partial \vartheta}\cos 2\delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta}\cos 2\zeta + \frac{\partial \Theta}{\partial \vartheta} = \sin 2\delta \sin Z,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \delta}\cos 2\delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \delta}\cos 2\zeta + \frac{\partial \Theta}{\partial \delta} = 0,$$
$$\frac{\partial Z}{\partial \zeta}\cos 2\delta + \frac{\partial \Delta}{\partial \zeta}\cos 2\zeta + \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = 0,$$

und die Beziehungen (5) schreiben sich nunmehr

$$\left.\begin{aligned} p_\varphi &= p_1, & q_1 &= \varphi + Z,\\ p_\psi &= p_2, & q_2 &= \psi + \Delta,\\ p_\vartheta &= p_3 \sin 2\delta \sin Z, & q_3 &= \Theta. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Nach Einsetzen dieser Werte in den Energieausdruck (4) erhält man

$$2T = \frac{p_1^2}{L} + \left(p_2^2 - p_1^2\right)\left(\frac{\sin^2 q_1}{I} + \frac{\cos^2 q_1}{K}\right), \quad (9)$$

was formal mit Gleichung (3) übereinstimmt und daher auf die von mir (l. c.) angegebenen Quantenformeln

$$p_3 = \frac{(n_1 + n_3)h}{2\pi},$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{2T}{p_3^2} - \left(\frac{\sin^2 q_1}{I} + \frac{\cos^2 q_1}{K}\right)}{\frac{1}{L} - \left(\frac{\sin^2 q_1}{I} + \frac{\cos^2 q_1}{K}\right)}}\, dq_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_3} \quad (10)$$

führt. Der Ausdruck (9) ist jedoch insofern allgemeiner als (3), als die Richtung der Polarachse des Koordinatensystems willkürlich gewählt ist. Sie fällt mit der Richtung des Hauptträgheitsmomentes zusammen, wenn $p_\vartheta = 0$, d. h. $Z = \Delta = 0$, $\Theta = \pi$ wird; in diesem Grenzfalle ist die Gleichung (9) mit (3) identisch.

Damit ist gezeigt, daß sich das Problem der kräftefreien Bewegung eines starren Körpers, wie dies die allgemeine Theorie voraussehen ließ, in zwei verschiedenen Weisen quanteln läßt. Jedoch ergeben beide Methoden das gleiche Resultat: Die Substitution

$$\cos^2 q_1 = \frac{\cos^2 \chi}{1 + m \sin^2 \chi}, \quad m = -\frac{\frac{1}{I} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{I} - f^2},$$

verwandelt nämlich unsere Gleichung (10) unmittelbar in die Reichesche Endformel

$$\frac{2}{\pi}\frac{\frac{1}{K} - f^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{I} - f^2\right)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\chi}{(1 + m \sin^2\chi)\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \chi}} = \frac{n_1}{n_1 + n_3},$$

wobei

$$\varkappa^2 = \frac{\left(f^2 - \frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{I} - \frac{1}{K}\right)}{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{L}\right)\left(\frac{1}{I} - f^2\right)}$$

gesetzt ist.

§ 3. Wir ergreifen die Gelegenheit um eine etwas knapp gehaltene Bemerkung unserer erwähnten Arbeit[1]), die gelegentlich zu Mißverständnissen Anlaß geben könnte, näher auszuführen. Es handelt sich um die Verallgemeinerung der Betrachtung über die Bewegung des symmetrischen Kreisels, dadurch daß man die Achse des polaren Bezugssystems nicht von vornherein mit der Richtung des Hauptmoments der Bewegungsgröße zusammenfallen läßt. In bezug auf diese Achse OP benutzen wir die in § 2 eingeführten Bezeichnungen φ, ψ, ϑ. Dagegen seien die entsprechenden Eulerschen Winkel in bezug auf die mit dem Hauptträgheitsmoment zusammenfallende Achse OG mit $\varphi', \psi', \vartheta'$ benannt (Figur). In diesem letzteren System wurde die Energie T (l. c.) in der folgenden Form angegeben

$$2T = \frac{u_1'^2 - u_2'^2}{I} + \frac{u_2'^2}{L}, \qquad (u_1' \geq u_2') \quad (1)$$

wo unter u_1', u_2' die Integrale

$$u_1' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_{\psi'}\, d\psi', \quad u_2' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_{\varphi'}\, d\varphi' \quad (2)$$

verstanden sind, während $\vartheta' = \text{const}$ ist. Auch den allgemeineren, von der Achse OP ausgehenden Fall könnte man nach dem vom Verfasser

1) P. S. Epstein, Verhandl. d. D. phys. Ges. 18 402—403, 1916. (Im folgenden mit l. c. zitiert.)

angegebenen Schema behandeln; einfacher gelangt man indessen durch die folgende Überlegung zum Ziele. Die Wirkungsfunktion

$$W = \sum_1^f \int p_i \, dq_i$$

ist gegenüber beliebigen Punkttransformationen invariant, daher gilt

$$\int p_{\varphi'} \, d\varphi' + \int p_{\psi'} \, d\psi' = \int p_\varphi \, d_\varphi + \int p_\psi \, d_\psi + \\ + \int p_\vartheta \, d\vartheta .$$

Nun ist dem physikalischen Sinne nach $p_{\varphi'} = p_\varphi$ (als Projektion des Impulses auf die Figurenachse) und $\varphi' + \psi = \varphi' + \psi'$ (als Azimut der Rotation um diese Achse). Ziehen wir die Identität

$$\int p_{\psi'} \, d(\varphi' + \psi') = \int p_\varphi \, d(\varphi + \psi)$$

von der obigen Gleichung ab, so bleibt

$$\int (p_{\psi'} - p_{\varphi'}) \, d_{\psi'} = \int (p_\psi - p_\varphi) \, d\psi + \int p_\vartheta \, d\vartheta . \quad (3)$$

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden (Fig. 1): 1. Die Bezugsachse OP liegt innerhalb des Präzessionskegels ($p_\psi > p_\varphi$). Dann haben die Winkel ψ', ψ und ϑ die gleiche Periodizität: während sich ϑ vom kleinsten zum größten Wert und wieder zurück ändert, wachsen ψ' und φ' je um 2π. Bezeichnen wir

$$\int_0^{2\pi} p_\psi \, d\psi = u_1 , \quad p_\varphi = u_2' = u_2 , \\ \oint p_\vartheta \, d\vartheta = u_3 , \quad (4)$$

so folgt aus Gleichung (3)

$$u_1' = u_1 + u_3 . \quad (5)$$

2. Die Bezugsachse OP' liegt außerhalb des Präzessionskegels ($p_\psi < p_\varphi$). Der Unterschied gegenüber dem ersten Falle liegt darin, daß jetzt während einer Periode nur ψ' um 2π wächst, während ψ einen bestimmten Winkel zuerst in einer Richtung, dann in der entgegengesetzten durchläuft. Es ist also

$$\oint (p_\psi - p_\varphi) \, d\psi = (p_\psi - p_\varphi) \oint d\psi = 0 ,$$

woher nach (3) und (4)

$$u_1' = u_2 + u_3 . \quad (5')$$

Die Größen u sind mit dem Faktor $h/2\pi$ den Quantenzahlen n (mit entsprechenden Zeigern) proportional zu setzen. Durch die veränderten Koordinaten entstehen also keine neuen quantentheoretisch zulässigen Werte des Präzessionswinkels, denn der Kosinus desselben ist durch das Verhältnis

$u_2'/u_1' = u_2/(u_1 + u_3)$, bzw. $= u_2/(u_2 + u_3)$,

welches in beiden Fällen die gleichen rationalen Werte annimmt, gegeben. In bezug auf die möglichen Lagen der neuen Bezugsachse OP besteht dabei zwischen den Fällen 1 und 2 ein Unterschied: Liegt nämlich OP innerhalb des Präzessionskegels, so ist die Auswahl der möglichen Werte des Impulses p_ψ durch die Beziehung (4) $p_\psi = u_1$ beschränkt und der Winkel α zwischen OG und OP kann nur einzelne diskrete, der Bedingung $\cos\alpha = u_1/(u_1 + u_3)$ genügende Werte annehmen. Wenn dagegen OP' außerhalb des Präzessionskegels zu liegen kommt, so ist stets $\oint p_\psi \, d\psi = p_\psi \oint d\psi = 0$. Die erste Quantenbedingung ist also identisch erfüllt, welchen Wert ($p_\psi \leq p_\varphi = u_1$), der Impuls und mit ihm der Winkel zwischen OG und OP' auch annehmen mag, solange er nur größer ist als der Winkel zwischen dem Hauptmoment OG und der Figurenachse OF.

Im zweiten Falle hat also der Durchstoßungspunkt der Bezugsachse auf der Einheitskugel ein flächenhaftes, im ersten Falle ein linienhaftes Gebiet zur Verfügung. Es liegt deshalb nahe, jenen für unendlich wahrscheinlicher zu halten als diesen und von den beiden Energieausdrücken, welche nach (1) und (5) oder (5') die bzw. Form haben

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{(u_1 + u_3)^2 - u_2^2}{I} + \frac{u_2^2}{L}\right], \ (u_1 > u_2), \quad (6)$$

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{(u_2 + u_3)^2 - u_2^2}{I} + \frac{u_2^2}{L}\right] \quad (6')$$

nur den zweiten, welcher formal mit (1) übereinstimmt, zu berücksichtigen. Die Übereinstimmung wird eine vollkommene, wenn man in (1) $u_1' = u_2' + u_3'$ bezeichnet, so daß u_3', ebenso wie u_3 in (6'), keiner Beschränkung mehr unterworfen ist. Diesen Sinn hatte meine Bemerkung (l. c. S. 403), daß die allgemeine Wahl der Bezugsachse gerade auf dieselbe Formel führt wie die spezielle. Allerdings wurde zugleich angedeutet, daß man durch eine andere Art der Mittelung im Bereich hoher Temperaturen zur Übereinstimmung mit der Erfahrung gelangen kann.

Sieht man nämlich von diesen geometrischen Verhältnissen ab, so kann man Formel (6') als Spezialfall von (6) für $u_1 = u_2$ ansehen und braucht sie nicht gesondert zu betrachten[1]). Die

1) Man könnte sich davon das folgende anschauliche Bild machen: Physikalisch ist die Lage der Bezugsachse durch eine ausgezeichnete Richtung, etwa durch die Rich-

Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Energiestufe ist von diesem Standpunkt einfach proportional der Zahl der Möglichkeiten die feste Summe der Quantenzahlen $n_1 + n_3 = n_1'$ durch die Wahl verschiedener positiver ganzzahliger Werte der n_1 und n_3 zu verwirklichen, also einfach proportional der Zahl n_1' selbst. Dementsprechend ist jedes Glied der l. c. berechneten Summe $Q(\sigma) - 1$ mit n_1' (bzw. $n' + 1$ in den dort benutzten Bezeichnungen) zu multiplizieren. Nach der Eulerschen Summationsformel ist der Näherungswert dieser Summe für nicht zu große σ

$$\sum_1^\infty n e^{-\sigma n^2} = \frac{1}{2\sigma} - \frac{1}{12} - \frac{\sigma^2}{120},$$

und dies führt zu einer Verdoppelung der von mir angegebenen Werte der spezifischen Wärme, sowohl im Gebiete sehr tiefer als sehr hoher Temperaturen. Damit ist allerdings wenig gewonnen: wenn auch für hohe Temperaturen der Anschluß an die Erfahrung erreicht ist, so bleibt der viel stärkere Widerspruch bei tiefen Temperaturen in ungemindertem Umfange bestehen.

§ 4. Neuerdings ist Sophie Rotszajn[1]), von anderen Voraussetzungen ausgehend, zu einem formal mit dem meinigen übereinstimmenden Ausdruck für die spezifische Wärme gelangt. Jedoch ist die Definition der Konstanten σ in beiden Fällen eine verschiedene, so daß sie bei mir einem viermal größeren Wert hat als bei Frau Rotszajn. Zu einer befriedigenden Übereinstimmung mit der Erfahrung gelangt man, wenn man $\sigma T = 190$ setzt und dies bedeutet in meinem Falle eine größere Diskrepanz mit dem Bohr-Debyeschen Modell des Wasserstoffmoleküls als in dem ihrigen. Dieses Modell liefert nämlich für die nach meiner Festsetzung definierte Größe σT rund 560, nach der Rotszajnschen Definition nur 140; während also bei mir der numerische Wert von σT etwa dreimal zu groß herauskommt, so ist er bei Frau Rotszajn im Verhältnis $^3/_4$ zu klein, stimmt also sehr viel besser mit der Erfahrung überein. Jedoch auch diese Abweichung übersteigt noch immer die Grenzen der Messungsfehler: Zwischen dem Resultat der Theorie der spezifischen Wärmen und den Ergebnissen der Debyeschen Dispersionstheorie besteht in jedem Fall eine bis jetzt unhebbare Diskrepanz, welche man nicht ohne weiteres zugunsten der Theorie der spezifischen Wärmen deuten kann. Es ist nämlich im Auge zu behalten, daß diese Theorie als hypothetisches Element die unbewiesene Voraussetzung enthält, daß man quantentheoretisch das Vierkörpersystem des Wasserstoffmoleküls näherungsweise als starren Körper behandeln darf.

Wenn auch das Resultat der Rotszajnschen Arbeit relativ günstig ist, so scheinen mir die von ihr zugrunde gelegten Voraussetzungen nicht ganz von Einwänden frei zu sein. Es war unzweifelhaft ein glücklicher Gedanke, die kräftefreie Rotation der Moleküle als Grenzfall ihrer Drehung in einem magnetischen Felde aufzufassen und auf diese Weise die Freiheitsgrade des Problems inkohärent zu machen. Jedoch gibt eine bei der Durchführung desselben gemachte, durch mathematische Gründe nicht gebotene Vereinfachung zu ernsten Bedenken Anlaß. Die Schwierigkeiten, welche sich in meiner von Frau Rotszajn mehrfach zitierten Arbeit ergaben, rührten nämlich von der Berücksichtigung des Dralles, welchen das Molekül um seine Figurenachse besitzt, her. Diese Rotationsträgheit ist daran schuld, daß die in Frage kommende Quantenzahl (n') nicht den Wert o annehmen kann, was wiederum auf den dreimal zu kleinen Wert der Größe σ führte. Dieselbe Komplikation trat auch bei den Behandlungsweisen von Reiche und Planck auf; von einer neuen Theorie dieses Gegenstandes müßte man also in erster Linie verlangen, daß sie sich mit der erwähnten Schwierigkeit auseinandersetzt. Statt dessen wird der Drall um die Figurenachse bei Frau Rotszajn kurzerhand vernachlässigt; es ist klar, daß ein solches Vorgehen, welches den bestehenden Schwierigkeiten aus dem Wege geht, nicht zur Überwindung derselben führen kann.

Ein anderer Punkt, den ich bei dieser Gelegenheit zur Sprache bringen möchte, betrifft die Behandlung des Gegenstandes vom Standpunkt der zweiten Planckschen Hypothese. Es gehört zweifelsohne zu den wichtigsten Aufgaben der theoretischen Physik, möglichst viel an der Erfahrung prüfbare Fälle sowohl vom Standpunkt der zweiten als der ersten Planckschen Hypothese zu behandeln, um eine Entscheidung zwischen beiden herbeizuführen. Jedoch muß man die einmal gewählte Auffassung konsequent durchführen; persönlich halte ich es wenigstens nicht für folgerichtig, einen Teil der Freiheitsgrade desselben Systems nach der ersten, einen andern Teil nach der

tung eines von den Nachbarmolekülen herrührenden elektrischen oder magnetischen Feldes gegeben. Wird also im Gültigkeitsbereich der Formel (6) das molekulare Feld so erregt, daß es nicht mit einer der als Bezugsachsen möglichen Richtungen zusammenfällt, so muß sich unser Molekül in eine passende Lage drehen; da diese Drehung (wenigstens im Grenzfall verschwindender Feldstärken) ohne Energieabgabe vor sich geht, so ist die Annahme möglich und plausibel, daß das zur Ruhekommen des Moleküls für jeden der quantentheoretisch zulässigen Winkel α gleich wahrscheinlich ist. Die dem zweiten Falle entsprechenden Lagen kann man dabei als mit den zum ersten gehörigen gleichberechtigt ansehen.

1) Sophie Rotszajn, Ann. d. Phys. 57, 81, 1918.

zweiten Planckschen Hypothese zu quanteln. Man könnte sich jedoch fragen, ob es nicht einen Verstoß gegen diese Forderung bedeutet, wenn man die Abmessungen und Trägheitsmomente als für alle Moleküle des Wasserstoffs fest gegeben ansieht, dagegen die Bewegungen dieser als starre Körper aufgefaßten Molekeln nach der zweiten Planckschen Hypothese quantelt. Wir wissen ja, daß nach Bohr die Dimensionen der Molekel selbst durch Quantenbedingungen festgelegt werden und daß dieselben nur bei Zugrundelegung der ersten Planckschen Auffassung einen konstanten Wert annehmen[1]). Bei konsequenter Durchführung des zweiten Standpunktes müßte man, meiner Ansicht nach, auch über alle möglichen Trägheitsmomente mitteln[2]). Wie aus der Form meiner Gleichung l. c. (5) hervorgeht, in welcher dieselbe Quantenzahl, welche das Trägheitsmoment bestimmt (wiederum infolge des Dralls um die Figurenachse), auch für die Präzessionsbewegung eine Rolle spielt, dürften dabei die Rotszajnschen Ausdrücke nicht nur in den numerischen Werten der Konstanten, sondern auch in ihrer Form eine Veränderung erfahren.

1) In welchem Maße derselbe Vorwurf die Resultate von F. Reiche (Ann. d. Phys. **54**, 401, 1917) berührt, läßt sich nicht übersehen, da wir die Konstitution der von ihm einer Statistik unterzogenen Atome (bzw. Moleküle) nicht kennen.

2) Vgl. auch P. S. Epstein, l. c. S. 413.

Zürich, im März 1919. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 22. März 1919.)

Kurze Ableitung der Bewegungsgleichungen des Kreisels.

Von H. Lorenz.

Die große und immer steigende Bedeutung der Kreiselbewegung in der Physik und Technik erweckt den Wunsch nach einer einfachen Herleitung ihrer für den Gebrauch bequemsten Grundformeln möglichst ohne Zuhilfenahme der Methoden der analytischen Mechanik. Wir gehen zu diesem Zwecke von der ebenen Bewegung eines Punktes aus, dessen Bahn in den Polarkoordinaten r und ψ gegeben sein möge. Dann können wir seine Geschwindigkeit v mit ihren Komponenten in radialer Richtung und senkrecht dazu

$$v_r = \dot{r} \quad v_n = r\dot{\psi} \tag{1}$$

für einen bestimmten Bahnpunkt und den benachbarten in dem Vektordiagramm (Fig. 1) dem sog. Hedographen vereinigen. In diesem

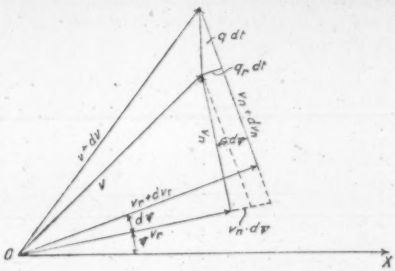


Fig. 1.

stellt die unendlich kleine Verbindung der Endpunkte der benachbarten Geschwindigkeiten v und $v + dv$ die mit dem Zeitelement dt multiplizierte resultierende Beschleunigung q dar, deren Projektionen in den Richtungen v_r und v_n die Radialbeschleunigung q_r und die Drehbeschleunigung q_n bedeuten. Aus der Figur liest man sofort die Beziehungen

$$q_r\,dt = d\,v_r - v_n\,d\,\psi$$
$$v_n + q_n\,dt = v_n + dv_n + v_r\,d\psi$$

ab, aus denen sich die Beschleunigungskomponenten selbst zu

$$q_r = \dot{v}_r - v_n\dot{\psi} = \ddot{r} - r\dot{\psi}^2$$
$$q_n = \dot{v}_n + v_r\dot{\psi} = r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi} \tag{2}$$

ergeben. Die darin enthaltenen Zusatzglieder

$$v_n\dot{\psi} = r\dot{\psi}^2. \quad v_r\dot{\psi} = \dot{r}\dot{\psi} \tag{2a}$$

werden gewöhnlich als Zentripetal- und Cariolisbeschleunigung bezeichnet, und sind ihrerseits Komponenten einer zur Bewegungsrichtung senkrechten Zusatzbeschleunigung.

Nach dieser Vorbemerkung gehen wir zu einem Rotationskörper von der Masse m über, der sich um einen festgehaltenen Punkt O seiner Achse drehen möge. Sehen wir zunächst von der Eigendrehung um diese Achse ab, so können wir uns den Körper durch einen Massenpunkt m im Abstande des Trägheitshalbmessers k um eine zu Om senkrechte Achse durch O ersetzt denken. Legen wir dann durch den Fixpunkt O ein Achsenkreuz $OXYZ$ (Fig. 2), so zerfällt die elementare Bewegung von m auf der Kugel um O in eine Drehung $d\,\psi$ auf dem Parallelkreis um OZ bei konstantem Abstand r und eine Drehung in der Meridianebene $m\,O\,Z$ um $d\,\psi$ bei konstantem Abstand k von O, wobei ψ der Winkel des Fahrstrahls gegen die Ebene $X\,O\,Z$ und ϑ die Neigung der Achse Om gegen OZ bedeuten. Den beiden elementaren Drehungen entsprechen aber nach (2) mit Rücksicht auf die da-

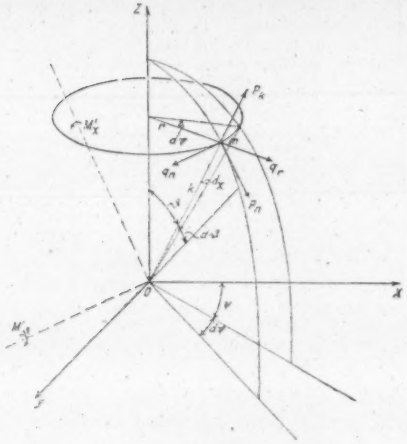


Fig. 2.

bei unveränderlichen Abstände r und k die Beschleunigungskomponenten

$$q_r = -r\psi^2,\quad q_n = r\ddot{\psi} + 2\dot{r}\dot{\psi}$$
$$p_k = -k\vartheta^2,\quad p_n = k\ddot{\vartheta}. \tag{3}$$

Wegen

$$r = k\sin\vartheta \tag{4}$$

dürfen wir an Stelle der ersten beiden Formeln (3) auch schreiben

$$q_r = -k\dot{\psi}^2\sin\vartheta,$$
$$q_n = k(\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta, \tag{3a}$$

und entnehmen aus Fig. 2 mit den Hebelarmen $k\cos\vartheta$ und k zwei Momente um zwei zu q_n bzw. p_n parallele Achsen durch O im Betrage von

$$\left.\begin{aligned} M'_\vartheta &= mk^2(p_n + q_r\cos\vartheta)\\ &= mk^2(\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta\\ M'_\chi &= mk\,q_n\\ &= mk^2(\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Hierin haben wir dem einen Moment den Zeiger χ gegeben, da es eine Drehung der Achse Om um den elementaren Winkel

$$d\chi = d\psi\sin\vartheta \tag{6}$$

laut Fig. 2 zur Folge hat.

Dreht sich nunmehr der Rotationskörper um seine Symmetrieachse Om mit der Winkelgeschwindigkeit ω, so erfordert die Erhöhung derselben mit dem polaren Trägheitsmoment mk_0^2 um diese Achse ein Moment

$$M_0 = mk_0^2\dot{\omega} = \frac{d}{dt}(mk_0^2\omega) = \frac{dB_0}{dt} \tag{7}$$

wenn wir unter

$$B_0 = m\,k_0^2\,\omega \tag{8}$$

das gewöhnlich als Drall bezeichnete Moment der Bewegungsgröße verstehen. Tragen wir dasselbe in Fig. 3 auf der Körperachse

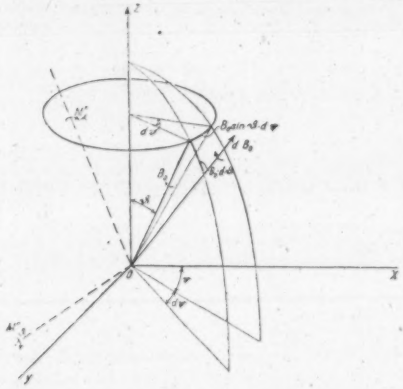


Fig. 3.

als Vektor auf, so werden durch seine Verschiebung um die Elementarwinkel $d\psi$ und $d\vartheta$ zwei neue unendlich kleine Drallvektoren geweckt, die ihrerseits als Ableitung zweier gleichgerichteter Momente M_χ'' und M_ϑ'' derart aufzufassen sind, daß diese mit Rücksicht auf den Drehsinn aus

$$B_0 = \sin\vartheta\,d\psi = M_\vartheta''\,dt,$$
$$B_0\,d\vartheta = -M_\chi''\,dt$$

sich zu

$$M_\vartheta'' = mk_0^2\dot{\psi}\sin\vartheta$$
$$M_\chi'' = -mk_0^2\,\omega\,\dot{\vartheta} \tag{9}$$

ergeben. Diese Momente haben, wie aus Fig. 3 hervorgeht, dieselben Achsen wie die durch (5) bestimmten und sind diesen darum einfach algebraisch hinzuzufügen, um die Gesamtmomente

$$M_\vartheta' + M_\vartheta'' = M_\vartheta,$$
$$M_\chi' + M_\chi'' = M_\chi, \tag{10}$$

zu erhalten. Nach Ausführung dieser Addition erhalten wir unter gleichzeitiger Hinzunahme des dritten Momentes (7) um die Körperachse sowie mit den Trägheitsmomenten

$$mk^2 = \Theta,\quad mk_0^2 = \Theta_0 \tag{11}$$

die endgültigen Bewegungsgleichungen des Kreisels

$$M_\vartheta = \Theta(\ddot{\vartheta} - \dot{\psi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta) + \Theta_0\,\omega\,\dot{\psi}\sin\vartheta$$
$$M_\chi = \Theta(\ddot{\psi}\sin\vartheta + 2\dot{\psi}\dot{\vartheta}\cos\vartheta) - \Theta_0\,\omega\,\dot{\vartheta}$$
$$M_0 = \Theta_0\,\dot{\omega}. \qquad (12)$$

Allerdings beschränkt sich deren Gültigkeit auf Rotationskörper, die aber sowohl in der Physik wie auch in technischen Anwendungen fast ausschließlich vorkommen. Dabei stellt $\dot{\psi}$ die Winkelgeschwindigkeit der Präzession, $\dot{\vartheta}$ diejenige der Nutation dar, die in den meisten Fällen klein gegen die eigentliche Kreiseldrehzahl ω sind. Trifft das nicht zu, so ist nicht zu übersehen, daß die letztere sich aus der Eigendrehzahl ω_0 und einem Anteil der Präzession derart zusammensetzt, daß

$$\omega = \omega_0 + \dot{\psi}\cos\vartheta \qquad (13)$$

wird. Darf diese alsdann gegenüber $\dot{\psi}$ und $\dot{\vartheta}$ meist große Winkelgeschwindigkeit ω als konstant angesehen werden, so fällt die dritte Gleichung (12) fort und man erhält nach Multiplikation der zweiten Formel (12) mit $\sin\vartheta$

$$M_\chi \sin\vartheta = \frac{d}{dt}(\Theta\,\dot{\psi}\sin^2\vartheta + \Theta_0\,\omega\cos\vartheta) = \frac{dB_z}{dt} \qquad (14)$$

worin B_z den Drall des Kreisels um die Achse OZ bedeutet. Ebenso ergibt sich nach Multiplikation der ersten Gleichung (12) mit $d\vartheta$, der zweiten mit $d\chi = d\psi\sin\vartheta$ und der dritten mit $\omega\,dt$ sowie Addition die Energiegleichung

$$M_\vartheta\,d\vartheta + M_\chi\,d\chi + M\,\omega\,dt = \frac{\Theta}{2}\,d(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\vartheta) + \frac{\Theta_0}{2}\,d(\omega^2), \qquad (15)$$

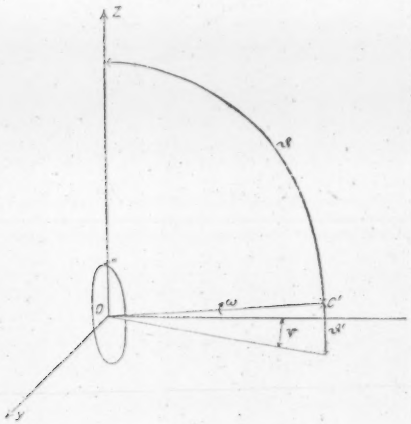


Fig. 4.

die im Verein mit (14) die Gleichungsgruppe (12) ersetzen kann.

Für die reguläre Präzession $\dot{\psi} =$ Konst. vereinfacht sich die erste Gleichung (12) mit

$$\dot{\vartheta} = 0, \quad \ddot{\psi} = 0, \quad \ddot{\vartheta} = 0$$

in

$$M_\vartheta = (\Theta_0\,\omega\,\dot{\psi} - \Theta\,\dot{\psi}^2\cos\vartheta)\sin\vartheta \qquad (12a)$$

während M_χ identisch verschwindet, womit (14) in

$$\Theta_0\,\omega\cos\vartheta - \Theta\,\dot{\psi}\sin\vartheta = C \qquad (14a)$$

übergeht.

Handelt es sich um kleine Schwingungen der rasch rotierenden Kreiselachse OC um eine Mittellage, die wir zweckmäßig mit OX zusammenfallen lassen, so werden wir im Anschluß an Fig. 4

$$\vartheta = 90^0 - \vartheta', \qquad \dot{\vartheta} = -\dot{\vartheta}',$$
$$\sin\vartheta = \cos\vartheta' = 1$$

setzen, wodurch nach Unterdrückung von $\dot{\psi}^2$ und $\dot{\psi}\dot{\vartheta}$ als klein von zweiter Ordnung die ersten beiden Formeln (12) übergehen in die vielfach benutzten Ausdrücke

$$M_\vartheta = \Theta_0\,\omega\,\dot{\psi} - \Theta\ddot{\vartheta}'$$
$$M_\chi = \Theta_0\,\omega\,\dot{\vartheta} + \Theta\dot{\psi}, \qquad (12b)$$

während die dritte Gleichung (12) für konstantes ω sich in diesem Falle erledigt.

(Eingegangen 3. April 1919.)

Bemerkungen zur Leuchtdauer der Serienlinien.

Von Fritz Reiche.

Vor einiger Zeit hat Herr J. Stark[1]) experimentell gefunden, daß bei den Serienlinien des Wasserstoffs, Heliums und Lithiums die Leuchtdauer mit steigender Gliednummer zunimmt.

Aus der Strahlungsdämpfung der klassischen Elektronentheorie läßt sich, wie auch Herr Stark betont, dieses Resultat nicht ableiten. Vielmehr nimmt die Amplitude A eines mit der Frequenz ω quasielastisch schwingenden Elektrons, dessen Schwingungen durch Strahlung gedämpft sind, nach dem Gesetz:

$$A = A_0 \cdot \varepsilon^{-bt} \qquad (1)$$

ab, wobei A_0 die Anfangsamplitude, t die Zeit ist, und

$$b = \frac{e^2\,\omega^2}{3\,m\,c^3} \qquad (2)$$

1) Ann. d. Phys. 49, 731, 1916.

(e und m sind hier Ladung und Masse des Elektrons, c ist die Lichtgeschwindigkeit).

Da mit zunehmender Gliednummer in der Serie ω zunimmt, so sind hiernach die höheren Glieder der Serie stärker gedämpft als die niedrigen. Die Leuchtdauer — etwa als diejenige Zeit definiert, in der die Amplitude der Schwingung auf $\frac{1}{\varepsilon}$ herabsinkt — würde demnach, im Gegensatz zu Starks Befund, mit steigender Gliednummer abnehmen.

Dagegen scheint mir die Quantentheorie des Bohrschen Atommodells einen Hinweis auf eine Erklärungsmöglichkeit der Starkschen Beobachtungen zu enthalten.

Wir wählen das einfachste Modell, das Wasserstoffatom, und betrachten nur Kreisbahnen. Die beim Übergang des Elektrons vom p-ten zum n-ten Quantenkreis emittierte Linie hat die Schwingungszahl:

$$\nu = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right), \tag{3}$$

wo

$$R = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3} \tag{4}$$

die Rydbergsche Zahl ist. Dabei ist h das Plancksche Wirkungsquantum.

Wir setzen

$$p = n + n' \tag{5}$$

und gehen zum Grenzfall hoher Ordnungszahlen n über; es sei also

$$\left.\begin{aligned} n &>> 1 \\ n' &<< n \end{aligned}\right| \quad \text{und ferner} \tag{6}$$

Dann wird

$$\nu = \frac{2Rn'}{n^3}. \tag{7}$$

Die Umlaufsfrequenz des Elektrons im n-ten Kreis ist:

$$\omega_n = \frac{8\pi^3 e^4 m}{n^3 h^3} = \frac{4\pi R}{n^3}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt also:

$$2\pi\nu = \omega_n \cdot n'. \tag{9}$$

Nun geht aber für hohe Ordnungszahlen die Bohrsche Theorie in die klassische Elektronentheorie über, ein Umstand, auf den Bohr besonders in seinen jüngsten Veröffentlichungen[1]) mit Betonung hingewiesen hat.

Nach der klassischen Elektronentheorie strahlt ein Elektron, das mit der Umlaufsfrequenz ω_n einen Kreis vom Radius a_n durchläuft, in der Zeit τ die Energie:

$$S = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega_n^4 a_n^2 \tau \tag{10}$$

aus, wenn seine Geschwindigkeit klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist. Andrerseits ist nach der Bohrschen Quantentheorie die in einem Emissionsakt ausgestrahlte Energie:

$$S = h\nu. \tag{11}$$

Aus (9), (10) und (11) folgt:

$$\tau = \tau_{nn'} = \frac{3hc^3 n'}{4\pi e^2 \omega_n^3 a_n^2}.$$

Setzt man hier für ω_n den Wert aus (8) ein, und für a_n den Wert

$$a_n = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 e^2 m}, \tag{12}$$

so folgt schließlich:

$$\tau_{nn'} = \frac{3h^6 c^3 n^5 n'}{128\pi^6 e^{10} m}. \tag{13}$$

Benutzt man hier die Zahlenwerte

$$h = 6{,}545 \cdot 10^{-27},\ c = 3 \cdot 10^{10};\ e = 4{,}774 \cdot 10^{-10};$$
$$\frac{e}{m} = 5{,}3042 \cdot 10^{17},$$

so wird

$$\tau_{nn'} = 9{,}349 \cdot 10^{-11} \cdot n^5 n'. \tag{14}$$

Für die aufeinanderfolgenden Glieder einer bestimmten Serie ist n konstant, während n' die Werte 1, 2, 3, ... annimmt. Aus (13) und (14) folgt also, daß für die aufeinanderfolgenden Glieder einer bestimmten Serie die „Leuchtdauer" $\tau_{nn'}$, d. h. die Dauer eines Emissionsaktes, mit steigender Gliednummer n' zunimmt, wie es Starks Beobachtungen ergeben.

Hierbei ist allerdings zu bedenken, daß die Ableitung nur für hohe Ordnungszahlen n, d. h. für Serien, die weit im Ultrarot liegen, Gültigkeit beansprucht. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß die Beziehung (13), ihrem Sinn nach, auch für niedrige Ordnungszahlen Anwendung findet.

Würde man sie ohne weiteres z. B. auf die Balmerserie ($n = 2$) übetragen, so würde man finden:

$$\tau_{2,n'} \sim 3 \cdot 10^{-9} \cdot n',$$

also z. B. für H_γ ($n' = 3$):

$$\tau_{2,3} \sim 9 \cdot 10^{-9},$$

während Stark[1]) den rund 20 mal größeren Wert $2 \cdot 10^{-7}$ als obere Grenze angibt.

Die Zahl der bei einem Emissionsakt ausgesandten Schwingungen wird:

1) N. Bohr, On the quantum theory of line-spectra I und II. Kopenhagen, D. kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturvidensk. og Mathem. Afd. 8, Raekke IV, 1, 1918.

1) l. c. S. 765.

$$z_{nn'} = \tau_{nn'} \cdot \nu = \frac{\tau_{nn'}\,\omega_n n'}{2\pi} = \frac{3\,c^3 h^3 n^2 n'^2}{32\pi^4 e^6} = \\ = 6{,}154 \cdot 10^5\, n^2 n'^2. \qquad (15)$$

Würde man auch diese Formel ohne weiteres auf den Fall niedriger Ordnungszahlen übertragen, so würde z. B. für H_γ folgen:

$$z_{2,3} \sim 2 \cdot 10^7.$$

Berlin, Mai 1919.

(Eingegangen 2. Mai 1919.)

Notiz zur Frage nach der Gültigkeit des Stokesschen Gesetzes.

Von Walther Gerlach.

I.

Im folgenden soll auf einen Punkt hingewiesen werden, der, soweit ich aus der Literatur sehen kann, in der Diskussion über das elektrische Elementarquantum bisher unberücksichtigt geblieben zu sein scheint. Die sogenannte Stokessche Formel[1]), das Bewegungsgesetz einer kleinen Kugel in einem Widerstand leistenden Medium unter dem Einfluß einer konstanten Kraft, wird sowohl bei Millikans wie bei Ehrenhafts Messungen zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums verwendet. Nach theoretischen Betrachtungen E. Cunninghams[2]) muß die Stokessche Formel

$$K = 6\pi\mu a v$$

(K Kraft, welche auf das Teilchen wirkt, μ der Reibungskoeffizient des umgebenden Mediums, a Radius, v Geschwindigkeit des Teilchens), rechts mit einem Zusatzfaktor $\left(1 + A\,\frac{l}{a}\right)^{-1}$ versehen werden, worin l die freie Weglänge des umgebenden Mediums bedeutet und $A = \frac{1{,}63}{2 - f}$, f das Verhältnis der Zahl der elastischen Zusammenstöße zu der gesamten Zahl der Zusammenstöße des Teilchens mit den Gasmolekülen. Für vollkommen elastische Stöße ist $f = 1$, $A = 1{,}63$, für vollkommen unelastische Stöße $f = 0$, $A = 0{,}815$. Die Größe f steht also zweifellos mit der Beschaffenheit der Oberfläche des Teilchens in Beziehung. Die Gültigkeit der Stokes-Cunninghamschen theoretischen Formel ist nach Millikan auf den Bereich $\frac{l}{a} < 0{,}4$ beschränkt.

1) G. G. Stokes, Math. u. Phys. Paper **1**, 41.
2) E. Cunningham, Proc. Roy. Soc. A. **83**, 357, 1910.

Ehrenhaft schließt aus dem Vergleich der Resultate verschiedener Methoden zur Größenbestimmung ultramikroskopischer Teilchen auf $f = 0$, also $A = 0{,}815$; Millikan hatte empirisch für Öltröpfchen in Luft $A = 0{,}875$ erhalten, also nahe denselben Wert. Aus den zuletzt veröffentlichten Messungen Millikans[1]) folgt für Öl in Wasserstoff $A = 0{,}811$. Ähnliche Werte fanden Roux, Lee u. a. (A zwischen 0,815 und 1,0). Dagegen berechnet sich aus den Millikanschen Versuchen[1]) mit Hg-Kügelchen in Luft $A = 0{,}711$. (Diese A-Werte sind aus den in Tabelle I—IV und VI—VIII gegebenen Versuchsdaten berechnet:

$$A = \frac{\left(\frac{e_1}{e}\right)^{2/3} - 1}{\frac{l}{a}};$$

die Unsicherheit in der Berechnung des Wertes der freien Weglänge l ändert das Resultat qualitativ nicht.)

Dieser letzte Wert für Hg in Luft, $A = 0{,}711$, ist aber nicht mehr in Beziehung zur Cunninghamschen Theorie zu setzen, denn aus ihm würde folgen $f = -0{,}293$. Ein negativer f-Wert hat aber nach der Definition von f keine physikalische Bedeutung mehr. Er würde einem „überunelastischen Stoß" entsprechen, bei welchem die Gasmoleküle beim Zusammenstoß mit dem Teilchen mehr Energie abgeben, als sie besitzen. Das gleiche Resultat, f negativ, hatten auch E. Meyer und ich[2]) bei der Prüfung des Stokesschen Gesetzes an Metallteilchen gefunden, wo A zu 0,6 (entsprechend $f = -0{,}72$) angenommen werden mußte, um aus den bei ein und demselben Teilchen unter verschiedenen Drucken (700 — 30 mm Hg) bestimmten Fallgeschwindigkeiten einen vom Druck unabhängigen Radius zu erhalten.

Wenn nun bei den Versuchen von E. Meyer und mir die Abweichung wahrscheinlich darauf zurückzuführen ist, daß die im elektrischen Funken oder Bogen hergestellten festen Metallpartikel ein wesentlich kleineres spezifisches Gewicht haben als das feste Metall[3]), so liegt es nahe, auch bei Millikan die Differenzen zwischen dem mit $A = 0{,}815$ ($f = 0$) berechneten und dem nach seiner graphischen Methode bestimmten Teilchenmesser auf den gleichen Umstand zurückzuführen. Hiermit wäre aber eine neue Stütze für die auf schönen experimentellen Unter-

1) R. A. Millikan, Ann. d. Phys. **50**, 729, 1916.
2) Edgar Meyer u. Walther Gerlach, Elster-Geitel-Festschrift (Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1915), S. 196.
3) Gründe s. Meyer u. Gerlach, l. c.

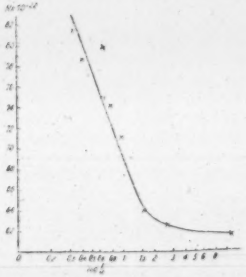
suchungen fußenden Anschauungen von Schidlof und Targonski[1]) gegeben, daß kleine Flüssigkeitsteilchen (auch *Hg*-Teilchen, wenn sie ganz rein sind) von einer Übergangsschicht *Hg*—*Hg*-Dampf—Luft umgeben sind, welche die mittlere Dichte des ganzen Teilchens auf einen niederen als den der reinen Substanz entsprechenden Wert bringt. Schließlich kann darüber hinaus noch das Fallgesetz durch die mit dem festen Teilchen halbstarr verbundene Übergangsschicht wesentlich modifiziert werden.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch die Messungen von Knudsen und Weber[2]) zu einem Wert $A = 0{,}683$ führen, welcher ebenfalls unter Zugrundelegung der Cunninghamschen Deutung für A einen negativen f-Wert ($f = -0{,}372$) ergibt.

II.

Auch die Bestimmung der Beweglichkeit der Teilchen aus der Brownschen Bewegung zeigt Ergebnisse, welche theoretisch schwer verständlich sind: Targonski[3]) hat die Loschmidtsche Zahl aus der Brownschen Bewegung von Öl und Quecksilberteilchen bestimmt für sehr verschiedene Werte l/a, wobei sowohl l (also der Druck des Gases) als auch a (die Größe der Teilchen) variiert wurde. Aus seinen Einzelwerten berechnen sich folgende Mittelwerte von N für mittlere Werte von l/a:

$\frac{l}{a}$	0,35	0,41	0,68	0,75	0,79
$N \times 10^{-22}$	81,6	78,5	74,9	79,4	73,6
$\frac{l}{a}$	0,99	1,12	1,59	2,80	11,02
$N \times 10^{-22}$	70,8	67,7	63,5	62,7	61,4



Diese Abhängigkeit von l/a, welche — teils in geringerem Maße — auch in anderen Versuchen (z. B. Fletscher, Eyring) auftritt, ist nach der Theorie der Brownschen Bewegung nicht zu erklären.

1) z. B. Arch. d. sc. phys. et nat. **43**, März—Mai 1917.
2) M. Knudsen u. S. Weber, Ann. d. Phys. **36**, 981, 1911.
3) A. Targonski, Arch. d. sc. phys. et nat. **41**, März—Mai 1916.

Zusammenfassung.

Die experimentelle Bestimmung der Beweglichkeit ultramikroskopischer Teilchen führt zu Resultaten, welche nach den Theorien der Fallgeschwindigkeit kleiner Kugeln (Stokes-Cunningham) und der Brownschen Bewegung nicht zu deuten sind.

Elberfeld, im April 1919. Physikal. Labor. der Farbenfabriken vorm. Fr. Bayer & Co.

(Eingegangen 24. April 1919.)

Über die elektrischen Figuren.

Von Karl Przibram.

(Mit Tafel XI.)

Im folgenden wird eine Deutung der polaren Unterschiede der elektrischen Figuren und damit auch der sie erzeugenden Büschel- bzw. Streifenentladung gegeben, zu der der Verfasser durch eine längere Reihe von Untersuchungen[1]) gelangt ist.

Die gebräuchlichste Anordnung zur Erzeugung elektrischer Figuren besteht darin, daß eine isolierende Platte (Harzkuchen, photographische Platte) auf eine Metallunterlage gelegt, eine Elektrode auf die Oberseite der Platte aufgesetzt und zwischen Elektrode und Metallunterlage plötzlich eine hohe Spannung angelegt wird.

Da die Luft nur eine gewisse elektrische Feldstärke aushalten kann, ohne leitend zu werden, so wird bei genügender Spannung ein Zusammenbruch ihres Isoliervermögens in Form einer leuchtenden Entladung stattfinden, ohne daß die Isolatorplatte, deren elektrische Festigkeit größer ist als die der Luft, durchschlagen wird.

Fände keine Störung des elektrischen Feldes durch die Entladung statt, so würde sich diese so weit von der Elektrode nach außen ausbreiten, als das von der Ladung der Elektrode herrührende Feld jenen, der elektrischen Festigkeit der Luft entsprechenden Wert übersteigt. Nun wandert aber ein Teil der Ladung

1) Wien. Ber. **108**, 1161—1171, 1899 (Umkehrung der Figuren in CO_2); **109**, 902—904, 1900; **110**, 960 bis 963, 1901; **113**, 439—468, 1904; **113**, 1303—1316, 1904 (schlecht leitende Flüssigkeiten); **113**, 1491—1507, 1904; **114**, 1461—1476, 1905 (schlecht leitende Flüssigkeiten); **116**, 557—570, 1907 (A, He); **121**, 2163—2168, 1912 (Chlor); **127**, 395—404, 1918.

infolge des Niederbruchs durch die leitend gewordene Luft in das Feld hinaus und erhöht so die Feldstärke nach außen hin; die Entladung kann sich daher über die durch das ursprüngliche ungestörte Feld gezogene Grenze hinaus noch weiter ausbreiten, sie schiebt, wie M. Toepler[1]), dem wir die Aufklärung der „Gleiterscheinungen" der Entladung verdanken, sagt, das zu ihrer Ausbreitung nötige Gefälle mit sich fort. Der Entladungsvorgang kommt erst dann zum Stillstand, die ihm entsprechende elektrische Figur hat erst dann ihre größte Ausdehnung erreicht, wenn die längs der Entladungsbahnen hinausfließende Ladung nicht mehr imstande ist, das ursprüngliche Feld über den zum Durchbruch erforderlichen Wert zu steigern.

Das Feld am Außenrande des Entladungsgebiets wird nun um so stärker ansteigen und die weitere Ausbreitung daher um so mehr begünstigt werden, je besser leitend die Entladungsbahnen sind und auf je weniger Radien der Leitungsvorgang beschränkt bleibt. Am günstigsten für das Wachstum ist ja offenbar der Fall, daß von der punktförmig gedachten Elektrode eine einzige dünne, gut leitende Entladungsbahn ausgeht; ihr jeweiliger Endpunkt wirkt ja dann als neue, der wirklichen gleichwertige Elektrode. Breitet sich dagegen die Ladung gleichförmig rings um die Elektrode aus, so ist die Steigerung der Feldstärke am Entladungsrande weit geringer, wie eine einfache elektrostatische Überlegung lehrt. Die beiden Bedingungen: gutes Leitvermögen und Lokalisierung längs einzelner Bahnen erscheinen nicht unabhängig voneinander; denn wenn sich einmal eine gut leitende Bahn gebildet hat, längs der ein großer Teil der auf der Elektrode sitzenden Ladung abfließen kann, so wird es weniger leicht zur Ausbildung neuer benachbarter Bahnen kommen.

Ionentheoretisch wird der Niederbruch des Isoliervermögens der Luft durch den Ionenstoß erklärt. Der Vorgang gestaltet sich verschieden, je nachdem die Elektrode negativ oder positiv ist, weil die negativen Ionen unter sonst gleichen Umständen weit wirksamere Ionisatoren sind als die positiven und daher schon bei Feldstärken starke Ionisation bewirken, bei denen die positiven sich noch nicht merklich an der Stoßionisation beteiligen[2]).

Ist die Elektrode negativ, so wandern die in einer zweifachen Grenzionisierungsschichte an der Elektrode gebildeten negativen Ionen in das Feld hinaus und können bei genügender Feldstärke längs einer größeren Strecke ionisieren, ohne daß gleichzeitig die durch sie gebildeten positiven Ionen auch ionisieren. Ist die Elektrode positiv, wandern also die in der zweifachen Grenzionisierungsschicht an der Elektrode gebildeten positiven Ionen in das Feld hinaus, so werden sie bei einer Feldstärke, bei der im früheren Fall (negative Elektrode) schon längere Ionisierungsstrecken gebildet wurden, noch nicht merklich ionisieren; steigt aber die Feldstärke so stark an, daß die positiven Ionen doch starke Ionisierung bewirken, so werden um so mehr auch die jetzt gebildeten wirksameren negativen Ionen ionisieren, so daß die Leitfähigkeit der so gebildeten Entladungsbahnen größer sein wird als im Falle einer negativen Elektrode.

Die Entladung an der positiven Elektrode wird also erst bei höherer Spannung einsetzen als an der negativen, dafür aber sofort besser leitende Bahnen bilden, wodurch, wie oben gesagt, gleichzeitig die Bedingungen für die weitere Ausbreitung der Entladung und für die Beschränkung auf einzelne wenige Bahnen gegeben sind.

Zu berücksichtigen ist auch die Ionenabwanderung vom Ende des Entladungsgebiets. Die Feldstärke und mit ihr die Neigung der Entladung, weiter zu greifen, wird hier um so größer sein, je plötzlicher der Übergang von der gut leitenden Entladungsbahn zur noch nicht ionisierten Luft ist. Das Hinauswandern der in der Entladungsbahn gebildeten Ionen wird das Gefälle abschwächen, und zwar um so mehr, je beweglicher die betreffenden Ionen sind, was im allgemeinen von den negativen Ionen gilt. Auch der Unterschied der Beweglichkeiten wird also bewirken, daß die positive Figur sich im allgemeinen weiter ausbreiten kann als die negative.

So erklären sich die wichtigsten polaren Unterschiede der elektrischen Figuren aus dem verschiedenen Ionisierungsvermögen und der verschiedenen Beweglichkeit der Ionen beider Vorzeichen; die negative Figur breitet sich gleichmäßiger, aber weniger weit um die Elektrode herum aus, die positive bleibt auf weniger Radien beschränkt, erstreckt sich aber längs dieser Radien weiter: abgerundete Form der kleineren negativen Figur, Strahlenform der größeren positiven Figur.

Auch die Tatsache, daß die negativen Figuren fast durchwegs verschwommen, die posi-

1) Vgl. diese Zeitschr. 8, 743—748, 1907.

2) Von der Frage, ob es überhaupt eine definierte Ionisierungsspannung der positiven Ionen gibt, werden die folgenden Überlegungen nicht berührt; es genügt die Tatsache, daß bei schwacher primärer Ionisierung die Stoßwirkung der positiven Ionen im Vergleich zu der der negativen zu vernachlässigen ist. Vgl. J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. 17, 414, 1916.

tiven dagegen scharf begrenzt sind, findet durch dieselbe Überlegung eine Erklärung: eine merkliche Ionisierung durch positive Ionen, ohne daß gleichzeitig die dadurch gebildeten negativen Ionen auch ionisieren, ist nicht möglich; hört an der Grenze der positiven Figur die Ionisierung durch die positiven Ionen auf, so fällt auch gleichzeitig die Ionisierung durch die negativen fort; die Ionisierung und mit ihr das Leuchten sinkt also von einem beträchtlichen Wert sofort auf Null herab. Bei der negativen Figur dagegen, bei der auch die negativen Ionen allein ionisieren können, ist ein allmählicher Übergang möglich. Der Unterschied in der Schärfe der Begrenzung wird sehr auffallend bei niedrigen Drucken, bei denen der Strahlencharakter der positiven Figur zurücktritt, vgl. die Fig. 1 und 2, negativ und positiv, bei etwa 50 mm Druck und 2000 Volt Spannung, Glasdicke etwa 1 mm.

Bei Erreichung einer gewissen Spannung verändert sich bekanntlich der Charakter der Figuren: es schießen aus den bei niedrigen Spannungen allein auftretenden regelmäßigen „Polbüscheln“ [1]) (Figuren erster Art) die eigentlichen „Gleitbüschel“ [2]) mit helleuchtenden Stielen hervor (Figuren zweiter Art). Das helle Leuchten verrät schon eine besonders starke Ionisierung und wir können mit Toepler diesen Stielen eine fallende Charakteristik zuschreiben. Die Ursache hierfür ist wohl die, daß bei wachsender Stromstärke (Erwärmung!) die Ionisierung gefördert wird, die stärkere Ionisierung aber wiederum einen erhöhten Elektrizitätszufluß bewirkt. Dieses Stadium wird um so eher eintreten, je mehr von vornherein die Strömung, wie bei den positiven Figuren, auf einzelne Bahnen beschränkt ist [2]), und es ist daher erklärlich, daß für das Auftreten positiver Gleitbüschel im allgemeinen eine niedrigere Spannung erforderlich ist als für negative Gleitbüschel.

Nach dem bisher Gesagten spielt bei den positiven Figuren die längs einzelner Bahnen hinausströmende Ladung eine größere Rolle als bei den negativen; letztere sind mehr durch das ursprüngliche Feld der Elektrode bestimmt. Dies könnte die Ursache dafür sein, daß die negativen Figuren im allgemeinen weit regelmäßiger sind als die positiven und sich deutlicher als Kraftlinienbilder darstellen als diese, die durch die Felder der hinausströmenden Ladungen stärker deformiert werden; daher die stärkere Schlängelung und Verästelung der positiven Züge.

Alle angeführten polaren Unterschiede der elektrischen Figuren sind also zurückzuführen auf den Unterschied der Ionen beider Vorzeichen, der wieder auf den Fundamentalunterschied: negatives Elektron — positives Molion zurückgeht. Je geringer in einem Gase der Unterschied der beiden Ionenarten ist, desto mehr müssen die polaren Unterschiede der elektrischen Figuren zurücktreten. Der Unterschied der Ionen hängt aber wiederum von der Elektronenaffinität des betreffenden Gases ab; je größer diese ist, desto rascher erfolgt die Molisierung der zunächst freien Elektronen, desto geringer ist ihre Lebensdauer, desto weniger wird sich also das „mittlere negative Ion“ vom positiven unterscheiden.

Nach den Untersuchungen von J. Franck [1]) ordnen sich die Gase nach zunehmender Elektronenaffinität etwa in folgende Reihe: Edelgase, Stickstoff, Wasserstoff, Sauerstoff, Chlor. In derselben Reihe sollten die polaren Unterschiede der elektrischen Figuren abnehmen. Daß dem tatsächlich so ist, geht wohl am deutlichsten aus den vom Verfasser [2]) in den Wiener Berichten veröffentlichten Bildern hervor, die er deshalb hier nochmals zum Abdruck bringen möchte.

Die typischen Unterschiede der Figuren in Luft können als bekannt vorausgesetzt werden (vgl. etwa die Aufnahmen von S. Mikola [3]). In Stickstoff sind die positiven Figuren etwas stärker verästelt als in Luft, insbesondere zeigen ihre Äste an den Enden feine, unter relativ großen Winkeln abgehende Verzweigungen, wie sie in Luft nicht beobachtet werden: Fig. 3, Stickstoff, positiv, 300 mm Druck, 13000 Volt; die negativen Figuren, die denen in Luft im übrigen ähnlich sind, zeigen sehr geringe Neigung zu Gleitbüschelbildung, so daß man sehr große negative Figuren erster Art erhalten kann: Fig. 4, Stickstoff, negativ, Atmosphärendruck, 42000 Volt, während in Luft schon bei 32000 Volt Gleitbüschel hervorschießen: Fig. 5, Luft, negativ, Atmosphärendruck 32000 Volt.

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. **53**, 217—234, 1917.
2) So erhält man in schlecht leitenden Flüssigkeiten hauptsächlich Figuren zweiter Art, da hier infolge der hohen elektrischen Festigkeit der Durchbruch nur längs einzelner Linien erfolgt.

1) J. Franck, Jahrb. d. Rad. u. El. **9**, 251, 260, 1912; J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. **17**, 409, 430, 1916.
2) Wien. Ber. **127**, 395—404, 1918. Die Glasdicke betrug bei allen Aufnahmen annähernd 1 mm, nur bei den Aufnahmen in Chlor 5 mm. Mit zunehmender Glasdicke wachsen im allgemeinen die polaren Unterschiede der Figuren.
3) Diese Zeitschr. **18**, 158, 1917.

	Radius[1]) in mm der Polbüschel bei 13000 Volt						Spannung in Kilovolt für Gleitbüschelbildung	
	Glasdicke 5 mm			Glasdicke 1 mm			Glasdicke 1 mm	
	+ Fig.	— Fig.	Quot. +/—	+ Fig.	— Fig.	Quot. +/—	+ Fig.	— Fig.
Luft	20	5	4	16	7	2,3	über 13, unter 20	über 24, unter 32
N_2	23	7	3,3	17	8,5	2,0	„ 13, „ 24	„ 42, „ ?
H_2	21,5	8	2,7	17	11	1,5[2])	„ 7, „ 13	„ 13, „ 24
CO_2	6,5	3,5	1,9	5	3	1,7[2])	„ 13, „ 24	„ 13, „ 24
O_2	6,5	3	2,2	4	3,5	1,1[2])	„ 20, „ 22	„ 17, „ 20
Cl_2	5	3	1,7	—	—	—	zirka 24	zirka 24

In Sauerstoff[3]) werden die beiden Figuren einander viel ähnlicher; beide sind ärmlich im Vergleich zu denen in Luft, und insbesondere fehlen die palmettenförmigen Endungen der negativen Gleitbüschel: Fig. 6, positiv, Fig. 7 negativ, Sauerstoff, Atmosphärendruck 24000 Volt. In Chlor sind die Figuren kaum mehr zu unterscheiden, nur eine etwas stärkere Schlängelung und Zerfaserung läßt die positive Figur erkennen: Fig. 8 positiv, Fig. 9 negativ, Chlor, Atmosphärendruck, 32000 Volt. Die negativen Gleitbüschel zeigen hier auch nicht jene fast rechtwinkligen Abknickungen der sonst geraden oder großzügig geschwungenen Stiele, die diese Figuren in Luft und auch noch in Sauerstoff charakterisieren.

Über die Größenverhältnisse gibt obige Tabelle Aufschluß.

Von Luft abgesehen, die wohl als Gasgemisch in bezug auf die Größenverhältnisse, nicht aber in bezug auf die Formunterschiede eine Sonderstellung einnimmt, folgen die Gase im ganzen, auch was das Verhältnis der Figurengrößen anbelangt, der Reihe der Elektronenaffinitäten, wobei noch als weitere Bestätigung daran zu erinnern ist, daß, wie der Verfasser in einer früheren Arbeit[5]) gezeigt hat, der Größenunterschied der beiden Figuren in *He* und *A* noch etwas größer ist als in Luft, also nach obiger Tabelle auch größer als in N_2. Gerade aus seinen Beobachtungen in Argon konnte der Verfasser für dieses Gas eine besonders große Verschiedenheit der beiden Ionenarten vorhersagen, noch ehe J. Franck[1]) die Existenz freier Elektronen in den Edelgasen entdeckt hatte.

Die letzten Spalten der Tabelle zeigen, daß auch die für die negativen Gleitbüschel erforderliche Spannung, soweit sie einigermaßen bestimmbar ist, sich mit zunehmender Elektronenaffinität der im allgemeinen etwas niedrigeren für die positiven Gleitbüschel nähert.

Somit können die auffallendsten polaren Unterschiede der elektrischen Figuren ionentheoretisch gedeutet werden. In Übereinstimmung mit dieser Deutung nehmen sie ab mit zunehmender Elektronenaffinität des Gases, und insofern die Elektronenaffinität mit dem elektrochemischen Charakter zusammenhängt, bestätigt sich die schon von Reitlinger[2]) auf Grund seiner Untersuchungen an Lichtenbergschen Staubfiguren und der Beobachtungen Faradays an Büscheln ausgesprochene Vermutung, daß die polaren Unterschiede mit dem elektrochemischen Charakter des Gases zusammenhängen.

Anmerkung bei der Korrektur (29. Mai 1919): In einer vorläufigen Versuchsreihe hat sich der Verf. durch direkte Messungen überzeugt, daß die bei der Bildung einer positiven Figur auf die Platte übergehende Ladung tatsächlich größer ist als bei der Bildung einer negativen Figur, wie ja schon aus verschiedenen Gründen anzunehmen war. In einer gehaltvollen Arbeit, die dem Verf. erst nach Abschluß dieser Mitteilung zur Kenntnis kam, hat P. O. Pedersen (Danske Vidensk. Selsk. I, Nr. 11, 1919) die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Figuren gemessen und für die positiven zwei- bis viermal so groß gefunden wie für die negativen. Da dieses Verhältnis der Geschwindigkeiten eher größer ist als das der beiden Figurenradien unter gleichen Umständen (kürzere Dauer der positiven Entladung), so folgt aus der größeren

1) Die an beiden Polen angelegten Kapazitäten betrugen etwa je 3000 cm; um den Grenzwert der Büschelgrößen für sehr große Kapazität zu erhalten, sind obige Zahlen etwa um die Hälfte zu erhöhen. (Vgl. Wien. Ber. 127, 396, 1918.)

2) Nicht streng vergleichbar, da hier Gleitbüschel auftraten.

3) Die infolge der Kleinheit und geringen Deutlichkeit der Büschel unsicheren Werte des Verhältnisses in diesen Gasen werden gestützt durch die Resultate bei niedrigen Drucken (größere Büschelradien).

4) Auf den besten in diesem Gase erhaltenen Figuren erster Art (sie sind im allgemeinen viel undeutlicher als die in Luft aufgenommenen) ist zu erkennen, daß auch der Unterschied zwischen scharfer positiver und verschwommener negativer Begrenzung hier schwindet; auch die positiven Äste endigen verschwommen.

5) Wien. Ber. 116, 570, 1907.

1) Verh. d. D. phys. Ges. 12, 291, 1910.

2) Wien. Ber. 43, 539, 1861.

Ladung der positiven Figuren auch eine größere mittlere Stromstärke bei der Bildung der positiven Figuren bei gleicher angelegter Spannung, und, da der Gesamtquerschnitt der positiven Leitungsbahnen an der Elektrode zumindest nicht größer ist als der der negativen, auch tatsächlich eine größere mittlere Leitfähigkeit der positiven Leitungsbahnen, wie oben gefordert! Daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der positiven Figuren größer ist als die der negativen, hat übrigens der Verf. schon in seiner Erstlingsarbeit (l. c. 1899) geschlossen.

Wien, 22. März 1919.

(Eingegangen 31. März 1919)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Schwankungserscheinungen in der Physik.

Von Reinhold Fürth.

Einleitung.

Die Entwicklung der physikalischen Forschung in den letzten Jahren hat uns gezeigt, daß wir zu einer, mit den Beobachtungen im Einklang stehenden Theorie der physikalischen Erscheinungen nur dann gelangen können, wenn wir die im Gebiete des Makroskopischen geltende Phänomenologie verlassen und eine Deutung auf Grund einer molekularen Kinetik vornehmen. Der Grund dieser Nötigung liegt darin, wie die Beobachtung der meisten physikalischen Erscheinungen bei Annäherung an mikroskopische Dimensionen gezeigt hat, daß sie im Gegensatz zu ihrem makroskopischen Verhalten gewissen Schwankungen unterworfen sind, die vollkommen nach Gesetzen des Zufalls vor sich gehen und sich desto stärker bemerkbar machen, zu je kleineren Dimensionen die Beobachtung vordringt. Während nun die Phänomenologie bei der Deutung dieser Erscheinungen versagen muß, sind diese durch die kinetischen Theorien von vornherein gefordert, so daß die Auffindung der Schwankungserscheinungen in einem gewissen Sinne direkt als Beweis der Richtigkeit der kinetischen Auffassung dienen kann.

Die kinetische Theorie deutet die einfachen Gesetzmäßigkeiten im Gebiete des Makroskopischen als statistische Massenerscheinungen, bei denen ungeheuer viele Einzelfälle mitwirken, während ein Beobachter im molekularen Gebiete von einer Gesetzmäßigkeit überhaupt nichts bemerken könnte. Es muß nun ein Gebiet geben, wir wollen es das mikroskopische nennen, in dem der Beobachter zwar auch, wie im makroskopischen, nicht die Einzelereignisse, sondern nur die Wirkung einer größeren Anzahl solcher zugleich wahrnehmen kann, aber dennoch die Zahl dieser Einzelereignisse schon so stark reduziert ist, daß die beobachteten Größen unregelmäßigen Schwankungen unterworfen erscheinen. Die Beobachtung dieser Vorgänge ist offenbar für die physikalische Forschung von eminenter Bedeutung, da ihre Messung nach den Prinzipien einer statistischen Untersuchung quantitative Schlüsse auf die nicht direkt beobachteten Vorgänge in den molekularen Dimensionen zuläßt und dadurch zum ersten Male die Möglichkeit gibt, die kinetische Theorie auf realer Basis auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

Dazu ist allerdings erst ein Anfang gemacht worden, und ich will im folgenden versuchen, das bis jetzt Erreichte in systematischer Weise zusammenzustellen, um den Überblick über die Tatsachen zu erleichtern.

Um in der Darstellung der einzelnen Schwankungserscheinungen nicht aufgehalten zu sein, will ich zunächst diejenigen mathematischen Hilfsmittel der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, die für alle Schwankungserscheinungen die Grundlage bilden vorausschicken und dann der Reihe nach diejenigen Gebiete der Physik besprechen, auf denen derartige Erscheinungen beobachtet wurden oder zumindest Hoffnung für eine experimentelle Verifikation vorhanden ist.

Ich hoffe durch diese einheitliche Behandlungsweise den innigen Zusammenhang dieser Phänomene, der, wie ich glaube, in der Literatur zu wenig betont zu werden pflegt, zeigen zu können.

Kapitel I. Die Schwankungen vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Entkleidet man die Theorien der verschiedenen physikalischen Schwankungserscheinungen ihres, der jeweiligen Erscheinungsform angepaßten Gewandes und sucht den mathematisch-wahrscheinlichkeitstheoretischen Kern herauszuschälen, so findet man, daß bei den meisten vorliegenden Problemen folgendes altbekannte Problem der Wahrscheinlichkeitsrechnung zugrunde liegt.

Wir betrachten eine Serie, bestehend aus N voneinander unabhängigen Einzelereignissen, deren jedes entweder „günstig“ oder „ungünstig“

ausfallen kann. Die für alle N Einzelereignisse gleiche Wahrscheinlichkeit eines günstigen Ausfalles sei p, die eines ungünstigen $q = 1 - p$. Die Anzahl der günstigen Ereignisse einer solchen Serie sei n. Vorausgesetzt ist nun, daß es in unserem Ermessen steht, beliebig viele solcher Serien nacheinander in unbegrenzter Anzahl zu beobachten. Dabei lassen wir die Möglichkeit offen, daß der günstige oder ungünstige Ausfall eines bestimmten Einzelereignisses in der k-ten Serie auf den Ausfall desselben Ereignisses in der $k+1$ten Serie irgendeine Nachwirkung ausübt (Wahrscheinlichkeitsnachwirkung). Gefragt ist nun nach den Gesetzmäßigkeiten, nach denen sich die Zahlen n in der Zeit verteilen.

A. Schwankungen ohne Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

Unter diesen Umständen ist der Ausfall irgendeiner Serie von der vorausgegangenen gänzlich unabhängig, wir haben eine „statistische" Reihe im engeren Sinne vor uns.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$W(n)$: Wahrscheinlichkeit des Auftretens der Zahl n, $N - n = m$, $\nu =$ Mittelwert der Zahl n, λ: jene größte ganze Zahl, die von ν übertroffen wird.

Nach dem Bernoullischen Theorem nennen wir

$$\nu = pN \qquad \delta = \frac{n-\nu}{\nu}$$

„relative Schwankung" von n. Sind n_1 und n_2 zwei aufeinanderfolgende Werte von n, so bezeichnen wir $\Delta = n_1 - n_2$. Folgen die einzelnen Serien in gleichen Zeitabständen τ aufeinander, so heiße „durchschnittliche Dauer des n-Zustandes" die Zeit, während derer im Mittel ununterbrochen die Zahl n auftritt. Sie werde mit T bezeichnet. Ähnlich sei Θ die durchschnittliche Wiederkehrzeit des n-Zustandes.

Es lassen sich leicht folgende Formeln ableiten:

$$W(n) = \binom{N}{n} p^n q^m \text{ (Newtonsche Formel).} \quad (1a)$$

$$\overline{|\delta|} = 2\,W(\lambda)\left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right). \quad (2a)$$

Beweis: $n - \nu = n - pN = qn - pm$

$$\nu\,\overline{|\delta|} = \sum_{n=0}^{N} W(n)\,|n-\nu| = \sum_{n=0}^{\lambda} \frac{N!}{n!\,(m-1)!}\,p^{n+1}q^m - \sum_{n=0}^{\lambda} \frac{N!}{(n-1)!\,m!}\,p^n q^{m+1} + \sum_{n=\lambda+1}^{N} \frac{N!}{(n-1)!\,m!}\,p^n q^{m+1}$$

$$- \sum_{n=\lambda+1}^{N} \frac{N!}{n!\,(m-1)!}\,p^{n+1}q^m = \frac{2N!}{\lambda!\,(N-\lambda-1)!}\,p^{\lambda+1}q^{N-\lambda} = 2\,W(\lambda)\,(N-\lambda)\,p\,.$$

$$\overline{\delta^2} = \frac{q}{\nu} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{N}. \quad (3a)$$

Beweis: $\nu^2\,\overline{\delta^2} = \sum_{n=0}^{N} W(n)\,(\nu^2 - 2n\nu + n^2) = \nu^2 - 2\nu Np \sum_{n=1}^{N} \binom{N-1}{n-1} p^{n-1}q^m$

$$+ N(N-1)p^2 \sum_{n=2}^{N} \binom{N-2}{n-2} p^{n-2}q^m + Np \sum_{n=1}^{N} \binom{N-1}{n-1} p^{n-1}q^m$$

$$= \nu^2 - 2\nu^2 + (\nu^2 - \nu p) + \nu = \nu q = Npq.$$

Die Formeln (2) bzw. (3) wollen wir als Formeln für die „Schwankungsgröße" bezeichnen[5, 6, 7, 8, 9, 10].

Ferner erhält man sofort bei festgehaltenem n_1

$$\Delta(n_1) = (n_1 - n_2) = n_1 - \bar{n}_2 = \bar{n}_1 - \nu.$$

Daher allgemein

$$\overline{\Delta(n)} = n - \nu. \quad (4a)$$

Ferner für willkürliches n_1

$$\overline{\Delta^2} = \overline{(n_1 - n_2)^2} = \overline{(n_1 - \nu)^2} + \overline{(n_2 - \nu)^2} - 2\,\overline{(n_1 - \nu)\,(n_2 - \nu)} = 2\nu^2\,\overline{\delta^2}$$

oder mit Benutzung von (3)

$$\overline{\Delta^2} = 2\nu q. \quad (5a)$$

Die Formeln (4) und (5) bezeichnen wir als Formeln für die „Schwankungsgeschwindigkeit"[9, 10].

Schließlich ergibt eine einfache Überlegung

$$T = \frac{\tau}{1 - W(n)}, \quad (6a)$$

$$\Theta = \frac{\tau}{W(n)}. \quad (7a)$$

Wir wollen nun zwei Grenzfälle betrachten,

in denen unsere Formeln eine in den Anwendungen besonders wichtige Gestalt annehmen.

Grenzfall 1.

Die Zahl N der Ereignisse einer Serie sei so groß, die Wahrscheinlichkeit p des Einzelereignisses dagegen so klein, daß gleichzeitig

$$p \ll 1, \quad N \gg 1, \quad pN = \nu$$

endlich und von Null verschieden, $q \sim 1$. Unter dieser Annahme ergibt sich bei entsprechender Vernachlässigung

$$W(n) = \frac{N^n}{n!} \cdot p^n \cdot (1-p)^N = \frac{N^n}{n!} \frac{\nu^n}{N^n} e^{-pN}$$

oder

$$W(n) = \frac{e^{-\nu} \nu^n}{n!} \quad \text{(Poissonsche Formel).} \qquad (1\,a')$$

Unter Benutzung von (1 a') erhält man ferner für die Schwankungsgröße die Formeln

$$|\delta| = 2\,W(\lambda) = \frac{2 e^{-\nu} \nu^\lambda}{\lambda!}, \qquad (2\,a')$$

$$\delta^2 = \frac{1}{\nu}. \qquad (3\,a')$$

Die Schwankungsgeschwindigkeit wird

$$\Delta(n) = n - \nu, \qquad (4\,a')$$

$$\overline{\Delta^2} = 2\nu. \qquad (5\,a')$$

T und Θ ergeben sich durch Einsetzen von (1 a') in (6 a) und (7 a).

Grenzfall 2.

Sowohl N als auch ν und n seien so groß, daß man δ als kontinuierliche Veränderliche ansehen kann, ohne daß $p \ll 1$ ist. Da in diesem Falle größere Abweichungen der n vom Mittelwert ν sehr unwahrscheinlich werden, ist die Annahme zu machen $\delta \ll 1$, so daß höhere als die zweiten Potenzen in δ gegen 1 vernachlässigt werden können, gleichzeitig aber

$$n - \nu = \nu\delta \gg 1.$$

$W(n)$ erhält dann die Gestalt des Gaußschen Fehlergesetzes, und zwar[11])

$$W(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q N}} e^{-\frac{\nu^2}{2pqN}\delta^2}. \qquad (1\,a'')$$

Beweis: Wir setzen $qN = \mu$, daher

$$q\nu = p\mu, \quad N - \nu = \mu,$$

$$W(n) = W(\nu) \frac{(N-\nu)\dots(N-n+1)}{(\nu+1)\dots n} p^{n-\nu} q^{m-\mu}$$

$$= W(\nu) \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-\nu\delta+1)}{(\nu+1)\dots(\nu+\nu\delta)} \left(\frac{p}{q}\right)^{\nu\delta}$$

$$= W(\nu) \frac{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\left(1-\left(\frac{2}{\mu}\right)\dots\left(1-\frac{(\nu\delta-1)}{\mu}\right)\right.}{\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{2}{\nu}\right)\dots\left(1+\frac{\nu\delta-1}{\nu}\right)(1+\delta)}$$

$$\log W(n) = \log W(\nu) - \sum_{k=1}^{k=\nu\delta-1} k\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}\right) - \delta$$

$$= \log W(\nu) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}\right)\nu\delta(\nu\delta-1) - \delta$$

$$W(n) = W(\nu) \cdot e^{-\frac{\nu^2\delta^2}{2}\left(\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\mu}\right)+\frac{\nu\delta}{2}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu}\right)}.$$

Durch Anwendung der Stirlingschen Formel ergibt sich

$$W(\nu) = \frac{N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}}{\nu^\nu e^{-\nu}\sqrt{2\pi\nu}\cdot\mu^\mu e^{-\mu}\sqrt{2\pi\mu}} \left(\frac{\nu}{N}\right)^\nu \cdot \left(\frac{\mu}{N}\right)^\mu$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi p q N}}.$$

Vernachlässigt man schließlich $\nu\delta$ gegen $(\nu\delta)^2$, so ergibt sich

$$W(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p q N}} \cdot e^{-\frac{\nu^2}{2pqN}\delta^2}.$$

Da wir δ als kontinuierliche Veränderliche auffassen, so haben wir nun die Wahrscheinlichkeit $W(\delta)$ so zu definieren, daß $W(\delta)\,d\delta$ die Wahrscheinlichkeit bedeuten möge, daß δ zwischen δ und $\delta + d\delta$ liegt. Es wird daher

$$W(\delta)\,d\delta = \nu \cdot W(n)\,d\delta$$

oder

$$W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi q}} \cdot e^{-\frac{\nu}{2q}\nu^2}\,d\delta. \qquad (8\,a)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Formel tatsächlich der Bedingung genügt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(\delta)\,d\delta = 1.$$

Man erhält ferner für die Schwankungsgröße

$$|\delta| = 2\int_0^\infty \delta \cdot W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{2q}{\nu\pi}}, \qquad (2\,a'')$$

$$\overline{\delta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 \cdot W(\delta)\,d\delta = \frac{q}{\nu}, \qquad (3\,a'')$$

welche Formeln man auch direkt aus (2 a') und (3 a') mittels der Stirlingschen Formel erhalten kann. Die Größen $|\delta|$ und $\sqrt{\overline{\delta^2}}$ haben in diesem Falle ein konstantes Verhältnis, nämlich

$$\frac{\overline{|\delta|}}{\sqrt{\overline{\delta^2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979\ldots$$

Grenzfall 3.

Die Bedingungen des Grenzfalls (2) bleiben aufrecht, wozu aber noch die des Grenzfalls (1) $p \ll 1$, oder $\nu \ll N$ hinzukommt.

Dann ist wieder $q \sim 1$ und man erhält die Formeln[1, 8])

$$W(\delta)\,d\delta = \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\nu}{2}\delta^2} d\delta, \qquad (8a')$$

während sich die Schwankungsgröße auf

$$\overline{\delta} = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}} \quad \text{bzw.} \quad \overline{\delta^2} = \frac{1}{\nu}$$

reduziert.

In diesem, wie im vorhergehenden Falle verlieren bei kontinuierlicher Variabeln δ die Formeln für die Schwankungsgeschwindigkeit ihren Sinn.

Die in diesem Abschnitt entwickelten Formeln lassen sich selbstredend nicht nur auf physikalische Probleme, sondern auch auf solche allgemein statistischen Charakters, wie z. B. die Schwankungen der monatlichen Geburtenzahl eines Landes u. ä. anwenden. An letzterem Beispiel ist Formel (4a) verifiziert worden[12, 13]).

4. Schwankungen bei indirekter Beobachtung.

Wir wollen nun annehmen, daß wir nicht direkt die Zahl n der günstigen Ereignisse einer Serie beobachten können, sondern einen Effekt Q, der der Zahl n proportional sein soll. $Q = kn$, wo k selbst wieder keine konstante, sondern eine um einen Mittelwert $\bar{k}$ zufällig schwankende Größe sein soll.

Wir führen die Bezeichnungen ein

$$\delta_Q = \frac{Q - \bar{Q}}{\bar{Q}}, \qquad \delta_k = \frac{k - \bar{k}}{\bar{k}}.$$

Für das Folgende wird es sich empfehlen, eine von Lexis stammende Bezeichnungsweise einzuführen. Ist eine Größe u aus irgendeinem Grunde unregelmäßigen Schwankungen um einen konstanten Mittelwert $\bar{u}$ unterworfen, so bezeichnen wir die empirisch bestimmte „Dispersion" der u-Werte

$$\overline{\delta_u^2} = \left(\frac{\overline{u - \bar{u}}}{\bar{u}}\right)^2$$

als „normal", „übernormal" oder „unternormal", je nachdem diese Größe gleich, größer oder kleiner ist, als sich aus Formel (3a) für sie ergeben würde.

Wir wollen nun folgende Spezialfälle unterscheiden, wobei wir gemäß Grenzfall 2

$$\delta^2 = \frac{1}{\nu}$$

als normale Dispersion bezeichnen wollen.

1. Fall

$$\delta_k = 0, \quad \delta_n = 0 \quad \text{daher} \quad \delta_Q^2 = 0$$

unternormale Dispersion.

2. Fall

$$\delta_k = 0 \quad \delta_n \gtrless 0 \text{ (norm. Disp.)},$$

$$\overline{\delta_Q^2} = \overline{\delta_n^2} = \frac{1}{\nu} = \frac{k}{Q},$$

daher für $k < 1$ unternormale, für $k > 1$ übernormale Dispersion.

3. Fall

$$\delta_k \gtrless 0 \quad \text{(norm. Disp.)} \quad \delta_n = 0.$$

Infolge der Unabhängigkeit der aufeinanderfolgenden Serien addieren sich nach einem bekannten Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung die absoluten Schwankungsquadrate, daher

$$\overline{Q^2}\,\overline{\delta_Q^2} = n^2 \overline{\delta_k^2} \quad \text{oder} \quad \overline{\delta_Q^2} = \frac{1}{n}\overline{\delta_k^2} = \frac{1}{nk} = \frac{1}{Q}$$

die Q zeigen normale Dispersion.

4. Fall $\delta_k \gtrless 0$, $\delta_n \gtrless 0$ (beide norm. Disp.). In diesem Falle ist die normale Dispersion der Q selbstverständlich, da wir es bei der Beobachtung des Einzeleffektes einfach mit einer Überlagerung zweier Wahrscheinlichkeiten zu tun haben, also

$$\delta_Q^2 = \frac{1}{Q}.$$

Haben schließlich die k-Werte eine anormale Dispersion, so zeigen auch Fall (3) und (4) anormale Dispersion, und zwar bei unternormaler Dispersion der k Zwischenstellungen zwischen 1 und 3 bzw. 2 und 4.

Die Wichtigkeit der vorangehenden Erörterungen geht daraus hervor, daß ihre Außerachtlassung zu zahlreichen Fehlern in der Literatur Anlaß gegeben hat[2, 3, 4, 6]).

B. Schwankungen mit Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

In diesem Abschnitt wollen wir die allgemeine Frage behandeln, wie sich die in A abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten modifizieren, wenn eine Wahrscheinlichkeitsnachwirkung im früher definierten Sinne stattfindet. Wir nehmen an, diese Wirkung beruhe darin, daß der günstige Ausfall eines Einzelereignisses einer Serie ebenfalls begünstigend auf den Ausfall des gleichen

Ereignisses der nächsten Serie einwirken möge. Dabei sollen die Voraussetzungen des Grenzfalls (1), die für die Anwendungspraxis am wichtigsten sind, zutreffen. Es ist von vornherein klar, daß unsere Formeln für Schwankungswahrscheinlichkeit und Schwankungsgröße auch in diesem allgemeinen Falle ihre Gültigkeit behalten, da die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen n-Werte bei sehr vielen Serien durch unsere jetzige Annahme nicht geändert werden kann. Dagegen ändern sich die Formeln für die Schwankungsgeschwindigkeit, die nun kurz abgeleitet werden sollen[9, 10]).

1. Intermittierende Beobachtung.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: P sei die konstante Wahrscheinlichkeit, daß auf ein günstiges Einzelereignis in der nächsten Serie ein ungünstiges folge, und es sei

$$Q = 1 - P,$$

P' umgekehrt die Wahrscheinlichkeit, daß ein in einer Serie ungünstiges Einzelereignis in der nächsten günstig werde. $W(n_1, n_2)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß auf eine Zahl n_1 günstiger Ereignisse der einen Serie eine analoge Zahl n_2 in der nächsten Serie folge. $A_n(i)$ sei die Wahrscheinlichkeit, daß von n günstigen Ereignissen einer Serie bei der nächsten Serie i ungünstig werden; analog $E_n(i)$ die Wahrscheinlichkeit, daß zu n günstigen Ereignissen einer Serie in der nächsten i günstige hinzukommen, während das Schicksal der n vorigen Einzelfälle unbestimmt bleibt.

Offenbar ist nun

$$W(n, n+k) = \sum_{i=0}^{n} A_n(i)\, E_n(i+k);$$

$$W(n, n-k) = \sum_{i=k}^{n} A_n(i)\, E_n(i-k).$$

Ferner ist

$$A_n(i) = \binom{n}{i} P^i Q^{n-i}.$$

Man sieht leicht, daß zwischen ν, P und P' die Beziehung bestehen muß

$$\nu N = \nu(1-P) + (N-\nu)P'$$

oder, da $\nu \ll N$

$$\nu P = P' N = \nu'.$$

Definitionsgemäß ergibt sich daher für $E_n(i)$

$$E_n(i) = \frac{e^{-\nu}\nu'^i}{i!} = \frac{e^{-\nu P}(\nu P)^i}{i!}.$$

Setzen wir diese Werte schließlich in unseren Formeln

$$W(n, n+k), \quad W(n, n-k)$$

ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} W(n, n+k) &= e^{-\nu P} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} P^i Q^{n-i} \frac{(\nu P)^{i+k}}{(i+k)!} \\ W(n, n-k) &= e^{-\nu P} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} P^i Q^{n-i} \frac{(\nu P)^{i-k}}{(i-k)!} \end{aligned}\right\} \quad (9b)$$

Ist keine Nachwirkung vorhanden, dann wird

$$P = 1, \quad Q = 0$$

und es fallen alle Glieder der obigen Summen weg bis auf das Glied $i = n$, wodurch sich die Formeln (9b) reduzieren auf

$$W(n, n+k) = \frac{e^{-\nu}\nu^{n+k}}{(n+k)!}, \; W(n, n-k) = \frac{e^{-\nu}\nu^{n-k}}{(n-k)!} \quad (9a)$$

was, da keine Nachwirkung vorhanden ist, von vornherein zu erwarten war.

Vermöge Formel (9b) können wir leicht die Schwankungsgeschwindigkeit berechnen. In der Tat ist

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{\infty} k W(n, n+k) - \sum_{k=0}^{n} k W(n, n-k),$$

was nach Ausführung der komplizierten Summation

$$\Delta_n = P(n-\nu) \quad (4b)$$

ergibt. Analog erhält man

$$\Delta_n^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 W(n, n+k) + \sum_{k=1}^{n} k^2 W(n, n-k)$$
$$= P^2[(n-\nu)^2 - n] + (n+\nu)P$$

und durch neuerliche Mittelbildung über n

$$\Delta^2 = 2\nu P. \quad (5b)$$

Im Falle $P = 1$, also ohne Nachwirkung, gehen die Formeln (4b), (5b) in die bereits für diesen Fall früher abgeleiteten (4a'), (5a') über.

Ist die Nachwirkung sehr groß, was man z. B. erreichen kann, wenn man die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Beobachtungen τ sehr klein macht, dann wird $P \ll 1$, und (9b) geht für $k \gtrless 0$ über in

$$\left.\begin{aligned} W(n, n+k) &= e^{-\nu P} \frac{(\nu P)^k}{k!}, \\ W(n, n-k) &= e^{-\nu P} \binom{n}{k} P^k \end{aligned}\right\} \quad (9c)$$

und ihr Verhältnis im Grenzfall $P = 0$, da nur die Änderung $k = 1$ in Betracht kommt

$$\lim_{P=0} \frac{W(n, n+k)}{W(n, n-k)} = \frac{\nu}{n}, \quad (9c')$$

worin sich, wie in Formel (4b), die Asymmetrie der Schwankung selbst am Anfang der Beobachtung zeigt.

Trotz dieser Asymmetrie, die aussagt, daß auf einen vom Mittelwert weit entfernten n-Wert mit großer Wahrscheinlichkeit ein dem Mittelwert näherer folgt (Irreversibilität), geht aus unseren Formeln die prinzipielle Umkehrbarkeit der Zeitfolge (Reversibilität) hervor, indem die Wahrscheinlichkeit $H(n, m)$, in der i-ten Serie die Zahl n und in der $i+1$sten Serie die Zahl m anzutreffen, ebenso groß ist, wie die bei umgekehrter Zeitfolge resultierende analoge Wahrscheinlichkeit $H(m, n)$. Es ist nämlich

$$H(n,m)=W(n)\cdot W(n,m)=W(n)\cdot W(m,n+k)$$
$$H(m,n)=W(m)\cdot W(m,n)=W(n+k)\cdot W(n+k,n)$$

und nach Formel (9b) und (1a')

$$W(n)\cdot W(n,n+k)=W(n+k)\cdot W(n+k,n).$$

Wenden wir uns nun der Berechnung der Größen T und Θ zu. Wir bezeichnen einen „Nicht-n-Zustand" mit dem Symbol Nn, es bedeutet dann z. B. $W(n, Nn)$ die Wahrscheinlichkeit, daß auf einen n-Zustand ein beliebiger Nicht-n-Zustand folgt. Analoge Bedeutung haben die Symbole

$$W(Nn,n),\quad W(Nn,Nn).$$

Sei schließlich $\varphi_n(k\tau)$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein jetzt vorhandener n-Zustand durch k Intervalle der Länge τ andauert und $\psi_n(k\tau)$ die Wahrscheinlichkeit, daß auf einen beliebigen, jetzt vorhandenen Nicht-n-Zustand erst nach k Intervallen ein n-Zustand folgt. Da wir angenommen haben, daß die Nachwirkung sich immer nur auf die nächstfolgende Serie erstrecken soll, erhalten wir die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n(k\tau)&=W^{k-1}(n,n)\,(1-W(n,n)),\\ \psi_n(k\tau)&=W^{k-1}(Nn,Nn)\cdot W(Nn,n)\\ &=(1-W(Nn,n))^{k-1}\cdot W(Nn,n).\end{aligned}\right\}\quad(10b)$$

Da es nun ebensooft vorkommen muß, daß ein Nicht-n-Zustand in einen n-Zustand übergeht als umgekehrt, so ergibt sich

$$W(Nn,n)\,(1-W(n))=W(n,Nn)\cdot W(n)$$
$$=(1-W(n,n))\,W(n),$$

daher

$$W(Nn,n)=\frac{W(n)}{1-W(n)}\,(1-W(n,n))$$

unter Benutzung dieses Wertes folgt weiter

$$\left.\psi_n(k\tau)=\left\{1-\frac{W(n)}{1-W(n)}(1-W(n,n))\right\}^{k-1}\cdot\frac{W(n)}{1-W(n)}(1-W(n,n)).\right\}\quad(11b)$$

Die Werte von $W(n)$, $W(n, n)$ sind dabei aus Formel (1a') bzw. (9b) zu entnehmen. Definitionsgemäß folgen aus (10) und (11) für die durchschnittliche Dauer und Wiederkehrzeit

$$\left.\begin{aligned}T(n)&=\tau\sum_{k=0}^{\infty}k\varphi_n(k\tau)\\ &=\tau(1-W(n,n))\sum_{k=0}^{\infty}kW^{k-1}(n,n)\\ &=\frac{\tau}{1-W(n,n)},\end{aligned}\right\}\quad(6b)$$

$$\left.\begin{aligned}\Theta(n)&=\tau\sum_{k=0}^{\infty}k\psi_n(k\tau)\\ &=\frac{\tau}{W(Nn,n)}=\frac{\tau}{1-W(n,n)}\\ &\cdot\frac{1-W(n)}{W(n)}=T(n)\cdot\frac{1-W(n)}{W(n)}.\end{aligned}\right\}\quad(7b)$$

Ist eine Nachwirkung nicht vorhanden, so wird nach (9a)

$$W(n,n)=W(n)$$
$$W(Nn,n)=W(n)$$

und unsere Formeln gehen über in

$$\varphi_n(k\tau)=W(n)^{k-1}(1-W(n)),\quad(10a)$$
$$\psi_n(k\tau)=(1-W(n))^{k-1}\cdot W(n).\quad(11a)$$

(6b) und (7b) gehen über in (6c) und (7c).

Über ein Beispiel zur Illustration der statistischen Reihen mit Wahrscheinlichkeitsnachwirkung aus dem Gebiete der natürlichen Statistik siehe eine in dieser Zeitschrift erschienene Arbeit des Verfassers dieses Berichts[14]).

2. Kontinuierliche Beobachtung.

Wir denken uns nun die Zeit τ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Serien immer mehr verkleinert, während k gleichzeitig so zunehmen soll, daß die Zeit $t=k\tau$ endlich und von Null verschieden ausfällt. Wir sahen bereits, daß im Grenzfalle $P=0$ gesetzt werden muß, wenn wir uns vorstellen, daß die Nachwirkung eine stetige Funktion der Zeit ist.

Um unsere Formeln (6, 7, 10, 11) diesem Falle anzupassen, müssen wir den Grenzwert von $W(n, n)$ berechnen. Dieser ergibt sich zu

$$\lim_{P=0}W(n,n)=\lim_{P=0}\{(1-\nu P)(1-nP)\}$$
$$=\lim_{P=0}\{1-(n+\nu)P+\ldots\}$$

Wir stellen nun P als Funktion von τ in Form einer Potenzreihe dar von folgender Gestalt

$$P=a_1\tau+a_2\tau^2+\ldots\quad(12)$$

Dann wird $W(n,n)$ darstellbar in der Form

$$\lim W(n,n) = 1 - b_1\tau - b_2\tau^2 \quad \text{wobei} \quad b_1 = (n+\nu)a_1. \tag{12'}$$

Ist daher $a \gtrless 0$, so folgt für kontinuierliche Beobachtung aus (10b), (11b)

$$\varphi_n(k\tau) = \lim_{\tau=0}(1 - b_1\tau \ldots)^{k-1}(b_1\tau + \ldots) = e^{-b_1 t} b_1 \tau,$$

$$\psi_n(k\tau) = e^{-c_1 t} c_1 \tau \quad \text{wobei} \quad c_1 = \frac{W(n)}{1 - W(n)}(n+\nu)a_1.$$

Bezeichnet nun $\varphi_n(t)dt$ die Wahrscheinlichkeit, daß der n-Zustand nicht kürzer als t und nicht länger als $t + dt$ anhält, analog $\psi_n(t)dt$, so folgt endlich

$$\varphi_n(t)dt = b_1 \cdot e^{-b_1 t} \cdot dt \qquad b_1 = (n+\nu)a_1, \tag{10c}$$

$$\psi_n(t)dt = c_1 e^{-c_1 t}\, dt \qquad c_1 = \frac{W(n)}{1 - W(n)}(n+\nu)a_1. \tag{11c}$$

Durch Umwandlung der Summe in (6b), (7b) in ein Integral, erhält man weiter

$$T(n) = \int_0^\infty t\varphi_n(t)dt = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{a_1(n+\nu)}, \tag{6c}$$

$$\Theta(n) = \int_0^\infty t\psi_n(t)dt = \frac{1}{c_1} = \frac{1 - W(n)}{W(n)(n+\nu)\cdot a_1}, \tag{7c}$$

welche Formeln sich auch direkt aus (6b) und (7b) durch Einsetzung aus (12') gewinnen lassen.

3. Schwankungserscheinungen an der Reihe der Wiederkehrzeiten (kontinuierliche Beobachtung).

Wie man sieht, stellen auch die aufeinanderfolgenden Wiederkehrzeiten t eines gewissen n-Zustandes eine statistische Reihe dar, die um einen Mitttelwert Θ schwankt. Man kann auch hier nach der Schwankungsgröße fragen. Diese Art von Schwankungen sind aber insofern prinzipiell von den früher behandelten verschieden, als bei ihnen der Mittelwert der schwankenden Größe mit ihrem wahrscheinlichsten Wert im Gegensatz zu früher nicht zusammenfällt. Das kommt daher, daß in diesem Fall infolge der notwendigen Bedingung $t > 0$ Schwankungen um den wahrscheinlichsten Wert nur nach einer Richtung vor sich gehen können.

In der Tat ist nach (7c)

$$\Theta_n = \frac{1}{c_1},$$

während aus (11c) für den wahrscheinlichsten Wert folgt

$$t_w = 0. \tag{13}$$

Bezeichnen wir ähnlich wie früher als „relative Schwankung" die Größe

$$\varepsilon = \frac{t - \Theta}{\Theta},$$

dann ergibt deren Einführung in (11c) für die Schwankungswahrscheinlichkeit

$$\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = e^{-(1+\varepsilon)}d\varepsilon, \tag{11c'}$$

woraus für die Schwankungsgröße resultiert

$$\overline{|\varepsilon|} = \int_0^\infty \varepsilon\varphi(\varepsilon)d\varepsilon - \int_{-1}^0 \varepsilon\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{2}{e} = 0{,}7358, \tag{14}$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \int_{-1}^\infty \varepsilon^2\varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1, \tag{15}$$

also im Gegensatz zu den „n-Schwankungen" vom Mittelwerte unabhängig.

Die Wahrscheinlichkeit eines beliebigen positiven ε ist ferner kleiner als die eines negativen ε, indem

$$\left.\begin{aligned} \varphi(+) &= \int_0^\infty \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{e} = 0{,}3679\ldots \\ \varphi(-) &= \int_{-1}^0 \varphi(\varepsilon)d\varepsilon = 1 - \frac{1}{e} = 0{,}6321\ldots \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Mit diesen Betrachtungen wollen wir diesen mathematischen Teil abschließen, und uns den Anwendungen auf die physikalischen Erscheinungen zuwenden.

Literatur zu I.

1) M. v. Smoluchowski, Boltzmann-Festschrift S. 626, 1904.
2) E. v. Schweidler, diese Zeitschr. **11**, 614, 1910.
3) E. Meyer, diese Zeitschr. **11**, 215, 1910.
4) N. Campbell, Proc. Cambr. Soc. **15**, 117 u. 310, diese Zeitschr. **11**, 826, 1910.
5) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. **13**, 1069, 1912.
6) L. Bortkievicz, Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen, Berlin 1913.
7) M. v. Smoluchowski, Göttinger Vorträge über kinetische Theorie der Materie und Elektrizität S. 89, Leipzig 1914.
8) Lorenz und Eitel, Zeitschr. f. phys. Chem. **87**, 293 und 434, 1914.
9) M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. **123** (2a), 2381, 1915; **124** (2a), 339, 1915; diese Zeitschr. **16**, 321, 1915; Koll.-Zeitschr. **18**, 49, 1916.
10) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. **17**, 557, 1916.
11) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique, Leipzig 1916.
12) A. Podjed, diese Zeitschr. **19**, 39, 1918.
13) E. Schrödinger, diese Zeitschr. **19**, 218, 1918.
14) R. Fürth, diese Zeitschr. **19**, 421, 1918; **20**, 21, 1919.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

O. Lummer, Grundlagen, Ziele und Grenzen der Leuchttechnik. (Auge und Lichterzeugung.) Neue und bedeutend erweiterte Auflage der „Ziele der Leuchttechnik" 1903. gr. 8°. XVI u. 262 S. mit 87 Abb. im Text u. 1 Tafel. München u. Berlin, R. Oldenbourg, 1918. Geh. M. 12,50, geb. M. 14.—.

Die erste Auflage dieses Werkes, ein schmales Bändchen unter dem Titel „Ziele der Leuchttechnik" war der Abdruck eines Vortrages, den der Verf. im Elektrotechnischen Verein zu Berlin 1902 gehalten hatte, in dem er hauptsächlich über seine und seiner Mitarbeiter Untersuchungen und ihre Bedeutung für die Leuchttechnik berichtete. Inzwischen sind 15 Jahre vergangen und die Leuchttechnik hat sich inzwischen fast genau den Richtlinien entsprechend weiter entwickelt, wie sie in jenem Büchlein vorgezeichnet waren.

Die neue Bearbeitung unterscheidet sich nicht nur im Umfange — es ist ein stattlicher Band von 262 Seiten geworden — von jener ersten, auch der veränderte Titel bringt klar zum Ausdruck, daß es sich hier um eine abschließende Darstellung eines Gebietes handeln soll, dessen Weiterentwicklung sich allem Anscheine nach übersehen und begrenzen läßt.

Der Verf. disponiert seinen Stoff folgendermaßen: I. Lichtmessung; II. Photometrie verschiedenfarbiger Lichtquellen und Spektralphotometrie; III. Wesen des Lichtes und der Lichtquellen; IV. Mechanik des Leuchtens auf Grund der Elektronentheorie; V. Das Auge; VI. Strahlungsgesetze des schwarzen Körpers und des blanken Platins; VII. Beziehung zwischen Flächenhelligkeit und Temperatur; VIII. Messung schwarzer Temperaturen; IX. Bestimmung wahrer Temperaturen; X. Temperatur und Strahlungseigenschaften der Sonne; XI. Herstellung bisher unerreichter Temperaturen; XII. Ziele und Grenzen der Leuchttechnik.

Man erkennt, daß in den ersten Kapiteln eine breite Grundlage gelegt wird, als deren Frucht sich von Kap. VI ab Resultat auf Resultat ergibt, bis die Darstellung schließlich im XII. Kapitel in der Darlegung der Ziele und Grenzen der Leuchttechnik gipfelt. Die Anordnung des ganzen Werkes tritt durch die oben angegebenen Kapitelüberschriften so deutlich hervor, daß ein genaueres Eingehen darauf wohl nicht erforderlich ist. Dagegen wird eine genauere Besprechung der Fortschritte gegenüber der ersten Auflage zweckmäßig sein. Als eine der wichtigsten Errungenschaften ist meines Erachtens zu bezeichnen die genaue Ausmessung der Helligkeitsempfindlichkeitskurve des (normalen und total farbenblinden) menschlichen Auges, die von Schülern des Verfassers (Thürmel 1910, Bender 1913) mit dem von ihm und Pringsheim konstruierten Spektralflimmerphotometer vorgenommen wurde. Eine derartige Messung ist übrigens auch — wie es scheint unabhängig, aber zeitlich später — von Ives vorgenommen worden, mit etwa demselben Resultat, und letzterer Messung wird von Lux der Vorzug gegeben, ohne Angabe von Gründen. Deshalb möchte ich nachdrücklich betonen, daß dazu keinerlei Grund vorliegt, vielmehr sind die Thürmel-Benderschen Messungen mit allem Vertrauen zu betrachten; ihre Methodik ist einwandfrei und die Messungen sind an zahlreichen Versuchspersonen angestellt worden. Auch für die Theorie der Farbenblindheit sind diese Ergebnisse von großem Interesse, wenn dies auch im Hinblick auf die Ziele des Buches etwas in den Hintergrund tritt. Ihr Hauptwert liegt darin, daß sie es ermöglichen, an Stelle des bisherigen etwas unklaren Ausdruckes „Ökonomie" drei scharf gegeneinander abgegrenzte Begriffe, „technische Ökonomie", „energetische Ökonomie", „photometrische Ökonomie", einzuführen, wodurch eine Klassifikation und Beurteilung der Lichtquellen ermöglicht wird, die zum ersten Male wissenschaftlichen Anforderungen genügt. Im VII. Kapitel ermöglicht die Kenntnis der Empfindlichkeit des Auges die theoretische Herleitung eines Zusammenhanges zwischen Flächenhelligkeit und Temperatur (Lummer und Kohn), die bis 8000 Grad für den schwarzen Körper und für blankes Platin tabellarisch angegeben und in einem großen Bereich experimentell verifiziert wird. Während das VIII. Kapitel (Bestimmung schwarzer Temperaturen) nichts prinzipiell Neues bringt und bringen kann, sind im IX. Kapitel eine ganze Reihe von Methoden entwickelt, um wahre Temperaturen zu bestimmen, an Platin-Kohlefaden-Wolframlampen usw. Von diesen sei als besonders geistreich hervorgehoben die von Lummer und Pringsheim erdachte Methode der logarithmischen Isochromaten, die von Benedict im Breslauer Institut ausgeführt wurde. Unter welchen Bedingungen die Schlüsse daraus eindeutig sind, ferner, wie man mittels ihrer Hilfe auch das Absorptionsvermögen der Strahlungsquelle feststellen kann, wird im Anschluß an eine Abhandlung von Schaefer ausführlich besprochen. Nach dieser Methode haben Senftleben und Benedict die wahre Temperatur der Hefnerkerze und ihr Absorptionsvermögen festgestellt. Das XI. Kapitel berichtet über Lummers Untersuchungen über die Temperatur des positiven Kraters der Bogenlampe unter hohem Druck, durch die es gelang, die Temperatur desselben auf etwa 8000° abs. zu erhöhen, also eine Temperatur herzustellen, die erheblich höher als Sonnentemperatur ist, was sicher in Zukunft noch große Bedeutung erlangen wird.

Im letzten Kapitel gipfelt die Darstellung, indem nun die letzten Konsequenzen aus den vorhergehenden Darlegungen gezogen werden (im Anschlusse an eine Abhandlung von Lummer und Kohn). Hier wird grundsätzlich die maximale Leistungsfähigkeit sämtlicher Strahlungsquellen untersucht und das fundamentale Ergebnis ausgesprochen: Niemals kann ein beliebiger Strahler für den Energieverbrauch von 1 Watt mehr als 63,8 HK_0 liefern. Im besondern wird gezeigt, daß durch Verwendung eines schwarzen Körpers oder blanken Platins bzw. einer Substanz, deren Strahlungseigenschaften zwischen diesen Extremen eingeschlossen liegen, niemals mehr als rund 16 Proz. dieses Maximums erzielt werden können; der schwarze Körper muß dazu auf eine Temperatur von 6750°, blankes Platin auf eine solche von 5900° erhitzt werden. Die Erreichung dieser Temperaturen ist ein erstes Ziel der Leuchttechnik.

Man muß von der Benutzung von Temperaturstrahlern absehen, wenn man die maximale Ökonomie von 63,8 HK_0 pro Watt erreichen will. In weiterer Verfolgung dieses Gedankens wird als „idealer Strahler" ein solcher definiert, der die gesamte zugeführte Energie in sichtbare Energie umsetzt, und als Spezialfall wird der „maximal-ideale Strahler" hervorgehoben, der die ganze zugeführte Energie in gelbgrüne Strahlung (0,544 bis 0,550 μ) umsetzt. Dieser letztere erreicht das Maximum der technischen Ökonomie von 63,8 HK_0 pro Watt in der Tat, und zwar

bei relativ niedrigen Temperaturen. Die Berechnung der Messungen von Coblentz über die Strahlung der Feuerfliege ergibt dann wieder das interessante Resultat, daß hier die Natur fast vollständig den maximal-idealen Strahler verwirklicht hat.

Der im vorstehenden gegebene Überblick über den Inhalt des Buches wird nachdrücklicher, als Worte es vermöchten, den Eindruck hervorgerufen haben, daß wir es in der Tat mit einem für lange Zeit abschließenden Werke zu tun haben, das mit souveräner Beherrschung der Materie geschrieben ist. Wir können hinzufügen, daß die Darstellung frisch und temperamentvoll ist, was über gelegentliche Inhomogenitäten gerne hinwegsehen läßt; sie ist für den Physiker leicht, aber auch für den Techniker ohne große Mühe lesbar. So schulden wir dem Verfasser herzlichen Dank für die wertvolle Gabe, die er der Wissenschaft und Technik gleichzeitig dargebracht hat. —

Der Ref. fühlt sich verpflichtet, auf folgendes hinzuweisen: Er hat an dem Buche in gewisser Weise mithelfen dürfen, worüber das Vorwort Auskunft gibt und steht dem Verfasser seit 15 Jahren nahe. Dies hat ihn nach reiflicher Überlegung nicht abgehalten, diese Besprechung zu schreiben, da er sich sagte, daß es derselben nichts schaden könne, wenn sie von jemandem verfaßt sei, der das Buch genau kennt.

Clemens Schaefer.

M. v. Rohr, Das Auge und die Brille. (Aus Natur und Geisteswelt. 372.) 2. Aufl. 105 S. mit 84 Textabbildungen und einer Lichtdrucktafel. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1918. Geb. M. 1.50 (hierzu Teuerungszuschläge des Verlages und der Buchhandlungen).

Verf., der besonders in seinen „Optischen Instrumenten" in vortrefflicher Weise eine kurze allgemeinverständliche Darstellung der Abbeschen Theorie gegeben hat, stellt sich in dieser kleinen Schrift die Aufgabe, mit der Kenntnis der Brillenfragen auch die Bewertung der Brille in den Fachkreisen zu erhöhen, was ihm wohl gelungen sein dürfte.

Im ersten Abschnitt des Büchleins wird zunächst das Auge als ruhendes optisches System in Kürze erledigt, sodann das Hauptgewicht auf das Sehen mit bewegtem Auge gelegt und darin die Perspektive als die Anschauungsform behandelt, in der die räumliche Anordnung der Außenwelt dem Beobachter zugänglich ist. Sie ergibt sich aus der Einführung des perspektivischen Strahlenbüschels mit der Spitze im Augendrehpunkt.

Im zweiten prinzipiellen Abschnitt werden die für die moderne Brillenlehre wichtigen Ziele berührt, nämlich die Deutlichkeitssteigerung beim Blicken für fehlsichtige Augen und die Änderung der Richtung des Wahrgenommenen. Ohne auf die Beweise für die Aussagen in diesem Abschnitt einzugehen, die in dem umfangreicheren Brillenbuch des Verf. „Die Brille als optisches Instrument" nachgelesen werden können, werden zuerst die allseitig symmetrischen, dann die prismatischen und astigmatischen Brillengläser verfolgt; namentlich soweit die punktuell abbildenden oder die zweckmäßig durchgebogenen Gläser und Systeme in Betracht kommen, spielt bei der zum Schluß kurz behandelten Brille für beide Augen auch die Richtungsänderung eine Rolle. Interessant sind besonders die sinnvollen Bemerkungen über die Gullstrandschen Stargläser und die Fern- und Nahbrille für Linsenlose. Auf die chromatische Aberration wird auch in Kürze eingegangen, so daß man mit gutem Grund eine gewisse Vollständigkeit dem Büchlein nicht absprechen kann.

Im Schlußabschnitt über die Brillenfassung, dem sich eine Beschreibung verschiedener Klemmerformen sowie der wichtigsten Stielbrillen anschließt, wird auf die Oppenheimersche Schrift „Theorie und Praxis der Augengläser" verwiesen, in der diese Fragen eingehender zur Sprache gebracht sind. — Reichliche Illustrationen zeichnen das Werk aus.

Warum die Anwendung von Formeln und die Einführung geometrischer Vorstellungen möglichst eingeschränkt ist, ist nicht einleuchtend; setzt doch die geometrische Optik nur die geringsten mathematischen Kenntnisse voraus, soweit sie praktisch zur Anwendung kommt. Unter dieser Auffassung hat offenbar das Werk gelitten.

H. Falkenhagen.

E. Schwarz, Feuerfeste und hochfeuerfeste Stoffe. gr. 8. VI u. 44 S. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1918. M. 2.—

Der Verfasser gibt eine übersichtliche Darstellung unserer Kenntnisse auf dem Gebiete der feuerfesten Substanzen. Er bespricht zunächst die wichtigsten Anforderungen, die man an ein feuerfestes Material stellen muß, wie Indifferenz gegen chemische Agenzien, Gasdichtigkeit, Festigkeit usw. Dann behandelt er unter Berücksichtigung der neuesten Forschung in drei Abschnitten die feuerfesten Silikate, die Oxyde sowie die Karbide und Nitride und erläutert an einer Reihe von Diagrammen die Abhängigkeit der Erweichungstemperatur von der Zusammensetzung. Die zahlreichen Angaben über spezielle Eigenschaften der feuerfesten Stoffe werden jedem, der mit hohen Temperaturen zu arbeiten hat, von hohem Wert sein. Die kleine Schrift ist eine sehr willkommene Bereicherung der physikalisch-technischen Literatur.

F. Henning.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Herausgegeben von G. C. Schmidt. gr. 8°. I1. Mechanik und Meßmethoden. XII u. 384 S. m. 188 Abbildungen. I2. Die Lehre von den gasförmigen, flüssigen und festen Körpern. X u. 424 S. m. 180 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1918. M. 12.— bzw. M. 13.60; geb. M. 14.40 bzw. M. 16.—

Chwolsons treffliches Lehrbuch der Physik, dessen erster Band 1902 in deutscher Übersetzung erschien, ist bei uns bald beliebt geworden. Gerade vor Ausbruch des Krieges sollte eine Neuauflage des schnell vergriffenen Werkes erfolgen, an das Chwolson, manches kürzend, vieles dem schnellen Fortschreiten der physikalischen Wissenschaft gemäß erweiternd, bereits seine geschickte Hand gelegt hatte. Die lange Dauer des Weltbrandes verhinderte die Ausführung infolge des Abschneidens jeglicher Verbindung mit Petersburg. Der nie rastende Verlag Friedr. Vieweg & Sohn setzte sich deshalb mit G. C. Schmidt in Verbindung, der schon an der ersten Auflage mitgewirkt hatte, und dieser hat überaus sorgfältig das Manuskript Chwolsons durchgearbeitet, ergänzt und vor allem verdeutscht.

Bis jetzt liegen von der zweiten Auflage vor:
Bd. I_1: Mechanik und Meßmethoden, und Bd. I_2:

Die Lehre von den gasförmigen, flüssigen und festen Körpern. Schon mehrfach ist an dieser Stelle über die erste Auflage des Lehrbuches referiert worden (1904, 1905, 1906, 1913). Die Vorzüge des eigenartigen Werkes, die die früheren Referenten besonders hervorgehoben haben, „die Fülle und Vollständigkeit der Materie, die zahlreichen und gewissenhaften Literaturhinweise, die scharfen, übersichtlichen Figuren, die ausgezeichnete didaktische Anwendung und lichtvolle Klarheit", sie treten im ersten Bande wieder prägnant hervor, so daß wir mit gespanntem Vertrauen den weiteren Teilen entgegensehen. Wir können den Studierenden und denen, die Interesse an der Physik haben, das Lehrbuch von Chwolson nur wärmstens empfehlen. Karl Bergwitz.

F. Auerbach, Das Wesen der Materie. Ordentliche Veröffentlichung der „Pädagogischen Literatur-Gesellschaft Neue Bahnen". gr. 8°. 144 Seiten m. 15 Abbildungen. Leipzig. Dürrsche Buchhandlung 1918. Geh. M. 3.—, geb. M. 4.— u. T.

In knapp 150 Seiten ist hier in großen Zügen die gesamte Physik bis zu den neusten Errungenschaften, wie Quantenlehre, Relativitätsprinzip und Röntgenspektroskopie für den Laien dargestellt. Naturgemäß sind dadurch sehr viele Erscheinungen nur gestreift und oberflächlich behandelt, zumal der Ausgang vom Allereinfachsten im Anfang einen sehr breiten Raum einnimmt. Immerhin dürfte das Buch, da es außerdem jede Formel vermeidet, als populäre Schrift für den Laien nicht uninteressant sein. Für den Wissenschaftler bietet es kein Interesse. P. Neubert.

R. Vater, Die neueren Wärmekraftmaschinen. I. Einführung in die Theorie und den Bau der Gasmaschinen. Aus Natur und Geisteswelt, 21. Bd. VI u. 119 S. mit 41 Abbildungen. 5. Aufl. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1918. — **II. Gaserzeuger, Großgasmaschinen, Dampf- und Gasturbinen.** Aus Natur und Geisteswelt, 86. Bd. VI u. 114 S. mit 43 Abbildungen. 4. Aufl. Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1918. Jedes Bändchen M. 1.20, geb. M. 1.50. Teuerungszuschläge 50 Proz., einschl. 10 Proz. Zuschlag der Buchhandlung.

Auf die beiden anregend geschriebenen Schriften konnte schon früher (diese Zeitschrift 15, 466, 1914) empfehlend hingewiesen werden. Da die Neuauflage noch während des Krieges erfolgte, so durfte über manche auf den hier behandelten Gebieten gemachte Fortschritte nicht berichtet werden. Immerhin ist Verschiedenes, was veraltet war, ausgeschaltet und dafür neue Gestaltungen und Ergebnisse gesetzt worden.
R. Lucas.

A. Lampa, Ernst Mach. Prag 1918, Verlag Deutsche Arbeit.

Die Revision der Grundlagen der Physik, die uns die Relativitätstheorie gebracht hat, geht in ihren ersten Ursprüngen auf Mach zurück; die logischen und psychologischen Mängel des Systems, das seit Galilei und Newton anerkannt war, hat Mach deutlich empfunden und zum Ausdruck gebracht, und diese Sätze seiner Schriften haben Einstein — nach seinem eigenen Bekenntnis — wertvolle Anregungen gegeben. Die vorliegende Schrift ist eine Würdigung des Forschers und des Menschen Ernst Mach, in der die Einheit seiner wissenschaftlichen Persönlichkeit durch die Vielfältigkeit seiner Äußerungen verfolgt und auf eine Wurzel gebracht wird: „Das leidenschaftliche Interesse für die Theorie des Erkennens." Unter diesem Gesichtspunkte wird die Leistung Machs auf den Gebieten der Physik, Sinnesphysiologie, Psychologie, Biologie, Erkenntnistheorie besprochen und ein lebensvolles Bild dieses tiefen Denkers und reinen Menschen entworfen. M. Born.

Angebote.

Physiker oder Ingenieur

für Anfangsstellung in unserem physikalischen Laboratorium gesucht. Angebote mit Lebenslauf, Gehaltsansprüchen, womöglich mit Lichtbild an **Siemens & Halske A.-G.**, Glühlampenwerk, **Berlin-Charlottenburg,** Helmholtzstr. 4.

Gesuche.

Physiker

(promoviert mit Staatsexamen), bisher im Militärdienst tätig gewesen, sucht Stellung an einem größeren wissenschaftlichen oder industriellen Institut. Offerten unter **S. H. 543** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstr. 2 erbeten.

Optische Industrie

Stellung als **wissenschaftlicher Mitarbeiter** oder auch als **auswärtiger Berater** gesucht von Physiker mit langjähriger praktischer Erfahrung. Auch Beratung in Einzelfragen. Angebote unter **S. H. 544** durch den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstr. 2 erbeten.

Hochschulprofessor u. Privatdozent

der Physik, mit langjähriger Laboratoriumspraxis, deutsch-österreichischer Staatsbürgerschaft, **sucht** Stellung in der Schweiz, Holland, Skandinavien oder Amerika. Spricht englisch und nimmt auch Stellung in der Industrie bei guter Bezahlung. Angebote unter **S. H. 545** an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift, S. Hirzel, Leipzig, Königstraße 2.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

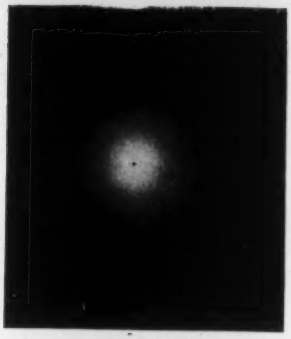


Fig. 1. Luft, negativ. 51 mm Druck, 2000 Volt.

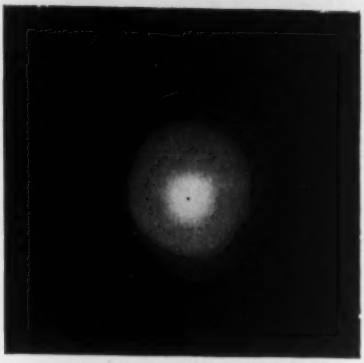


Fig. 2. Luft, positiv. 43 mm Druck, 2000 Volt.

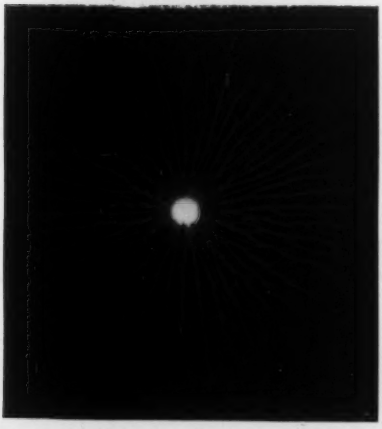


Fig. 3. Stickstoff, positiv 300 mm Druck, 13000 Volt.

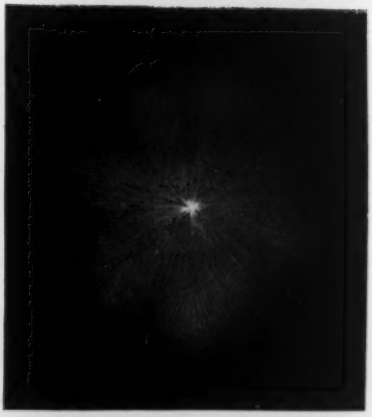


Fig. 4. Stickstoff, negativ. Atm.-Druck, 42000 Volt.

Fig. 5. Luft, negativ. Atm.-Druck, 32000 Volt.

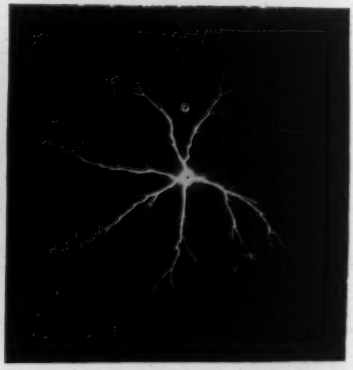
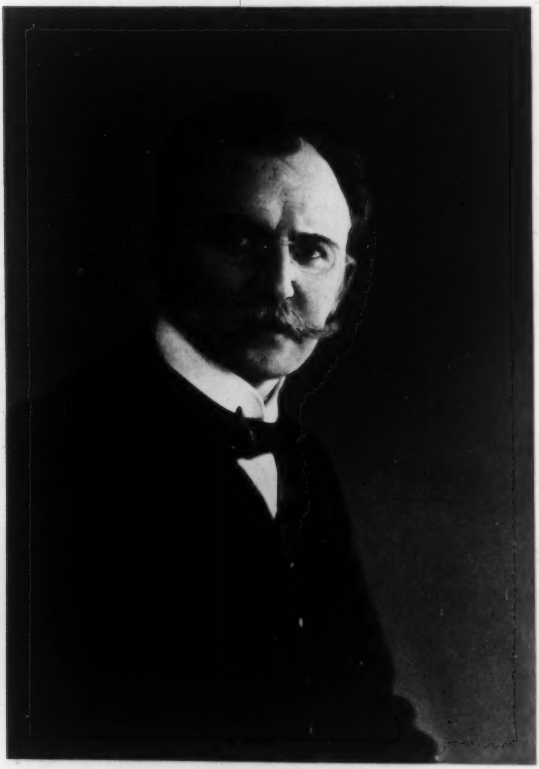


Fig. 6. Sauerstoff, negativ. Atm.-Druck, 24000 Volt.

Fig. 7. Sauerstoff, negativ. Atm.-Druck, 24000 Volt.

Fig. 8. Chlor, positiv. Atm.-Druck, 32000 Volt.

Fig. 9. Chlor, negativ. Atm.-Druck, 32000 Volt.



H. D. Simon